УДК 517.9 : 62-50

ДЕКОМПОЗИЦИЯ МОДЕЛЕЙ УПРАВЛЯЕМЫХ И НАБЛЮДАЕМЫХ ДВУХТЕМПОВЫХ СИСТЕМ

© 2022 М.М. Семенова

Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики, г. Самара, Россия

Статья поступила в редакцию 15.02.2022

В статье излагается метод декомпозиции двухтемповых систем, линейных по быстрой переменной, основанный на теории интегральных многообразий быстрых и медленных движений. Исследуется управляемость и наблюдаемость таких систем. Приведен пример, иллюстрирующий полученные результаты.

Ключевые слова: декомпозиция двухтемповых систем, интегральное многообразие, управляемость, наблюдаемость, асимптотические разложения.

DOI: 10.37313/1990-5378-2022-24-1-88-91

ВВЕДЕНИЕ

Исследованию свойств управляемости, наблюдаемости и стабилизируемости разнотемповых систем, линейных по быстрым переменным посвящено большое количество публикаций. Задача оптимального быстродействия двухтемповых систем изучена в работе [1], задача терминального управления с подвижным правым концом траектории изучена в [2]. В монографии [3] проведено исследование двухтемповых нелинейных автономных систем. В работе [4] для определенных значений параметра при условии ограниченных управлений построены глобальные аттракторы, в случае отсутствия ограничений на управление подобные исследования проведены в работе [5]. В монографии [6] проведено расщепление разнотемповых систем, линейных по быстрым переменным, изучены свойства управляемости, наблюдаемости, устойчивости и стабилизируемости, свойства идентифицируемости, пассивности таких систем изучены в монографии [7]. Данная работа посвящена изучению свойств управляемости и наблюдаемости двухтемповой нелинейной неавтономной системы.

Цель работы:

- Понижение размерности задачи управляемости и наблюдаемости нелинейной двухтемповой неавтономной системы так, чтобы модель меньшей размерности с большой степенью точности отражала все свойства исходной системы.
- Получение достаточных условий, управляемости и наблюдаемости сингулярно возмущенных систем.

Семенова Марина Михайловна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики. E-mail: semenova73@bk.ru

РАСЩЕПЛЯЮЩЕЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ

Рассмотрим модель сингулярно возмущенной системы вида

$$\dot{x} = f(t,x,\varepsilon) + A_1(t,x,\varepsilon)y + B_1(x,\varepsilon)u,$$
$$\varepsilon\dot{y} = g(t,x,\varepsilon) + A_2(t,x,\varepsilon)y + B_2(x,\varepsilon)u,$$
$$w = p(t,x,\varepsilon) + C(t,x,\varepsilon)y, \qquad (1)$$

где $x \in X \subset \mathbb{R}^{n_1}, y \in Y \subset \mathbb{R}^{n_2}$ – медленная и быстрая переменные, $u \in U \subset \mathbb{R}^r$ – управляющие воздействия, $w \in V \subset \mathbb{R}^p$ – измеряемая координата, $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0], f(t,x,\varepsilon), g(t,x,\varepsilon), p(t,x,\varepsilon)$ – векторные функции, $A_i = A_i(t,x,\varepsilon), B_i = B_i(x,\varepsilon), i = 1,2$; $C(t,x,\varepsilon)$ – матричные функции соответствующих размерностей, $t \in \mathbb{R}$, точка обозначает дифференцирование по t.

Пусть для системы (1) выполняются условия [8]:

1) Собственные значения $\lambda_j = \lambda_j(t,x), j = \overline{1,n_2}$ матрицы $A_2(t,x,0)$ удовлетворяют неравенству $Re\lambda_i \leq -2\beta < 0$.

2) Уравнение $g(t,x,0) + A_2(t,x,0)y = 0$ имеет изолированное решение

$$y = h_0(t,x) = -A_2^{-1}(t,x,0)g(t,x,0).$$

3) Функции $f, g, p, A_1, A_2, A_2^{-1}(t,x,0), B_1, B_2, C$ имеют достаточное число равномерно непрерывных и ограниченных частных производных по всем аргументам при всех $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0], t \in \mathbb{R}$.

Используя метод декомпозиции [6] и асимптотические разложения медленных интегральных многообразий [9], произведем гладкую замену переменных:

$$x(t) = v(t) + \varepsilon H(t,v(t),z(t),\varepsilon), H(t,v,0,\varepsilon) \equiv 0, y(t) = z(t) + h(t,x(t),\varepsilon).$$

После такой замены, получаем систему блочно–треугольного вида:

$$\dot v = F(t, v, \varepsilon) + \tilde B_1(v, \varepsilon H, \varepsilon)u,$$
$$\varepsilon \dot z = \tilde A_2(t, v, \varepsilon H, \varepsilon)z + \tilde B_2(v, \varepsilon H, \varepsilon)u,$$
$$w = p(t, v, \varepsilon H, \varepsilon) + C(t, v, \varepsilon H, \varepsilon)(z + h(t, v, \varepsilon)), \qquad (2)$$

где $F(t, v, \varepsilon) = f(t, v, \varepsilon) + A_1(t, v, \varepsilon)h(t, v, \varepsilon), F(t, 0, \varepsilon) = 0, \tilde A_2(t, v, \varepsilon H, \varepsilon) = A_2(t, v + \varepsilon H, \varepsilon) - \varepsilon \frac{\partial h}{\partial x}(t, v + \varepsilon H, \varepsilon)A_1(t, v + \varepsilon \cdot H, \varepsilon), \tilde A_2(t, 0{,}0, \varepsilon) = 0, \tilde B_2(v, \varepsilon H, \varepsilon) = B_2(v + \varepsilon H, \varepsilon) - \varepsilon \frac{\partial h}{\partial x}(t, v + \varepsilon H, \varepsilon)B_1(v + \varepsilon H, \varepsilon),$ $\tilde B_1(v, \varepsilon H, \varepsilon) = B_1(v + \varepsilon H, \varepsilon) - \frac{\partial H}{\partial z}\tilde B_2(v, \varepsilon H, \varepsilon), p(t, v, \varepsilon H, \varepsilon) = p(t, v + \varepsilon H, \varepsilon) + C(t, v + \varepsilon H, \varepsilon)h(t, v + \varepsilon H, \varepsilon), C(t, v, \varepsilon H, \varepsilon) = C(t, v + \varepsilon H, \varepsilon)$. Функцию $h(t, x, \varepsilon)$ можно искать как асимптотическое разложение $h(t, x, \varepsilon) = \sum_{k \geq 0} \varepsilon^k h_k(t, x)$ из уравнения $\varepsilon \frac{\partial h}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial h}{\partial x}(f(t, x, \varepsilon) + A_1(t, x, \varepsilon) \cdot h(t, x, \varepsilon)) = g(t, x, \varepsilon) + A_2(t, x, \varepsilon)h(t, x, \varepsilon)$. Функцию $H(t, v, z, \varepsilon)$ можно искать в виде асимптотического разложения $H(t, v, z, \varepsilon) = \sum_{k \geq 0} \varepsilon^k H_k(t, v, z)$ из уравнения $\varepsilon \frac{\partial H}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial H}{\partial v}F(t, v, \varepsilon) + \frac{\partial z}{\partial z}\tilde A_2(t, v + \varepsilon H, \varepsilon)z = F(t, v + \varepsilon H, \varepsilon) - F(t, v, \varepsilon) + A_1(t, v + \varepsilon H, \varepsilon)z$.

УПРАВЛЯЕМОСТЬ И НАБЛЮДАЕМОСТЬ

Для исследования свойств управляемости и наблюдаемости блочно–треугольной системы (2), линеаризуем ее по переменным состояния вдоль $v \equiv 0, z \equiv 0$:

$$\dot v = \frac{\partial F}{\partial v}(t, 0, \varepsilon)v + \tilde B_1(0{,}0, \varepsilon)u + \frac{\partial(\tilde B_1(0{,}0,\varepsilon)u)}{\partial v}v + \frac{\partial(\tilde B_1(0{,}0,\varepsilon)u)}{\partial z}z + a_1(t, v, z, \varepsilon), \varepsilon \dot z = \frac{\partial \tilde A_2}{\partial v}(t, 0{,}0, \varepsilon)v + \frac{\partial(\tilde A_2(t,0,0,\varepsilon)z)}{\partial z}z + \tilde B_2(0{,}0, \varepsilon)u + \frac{\partial(\tilde B_2(0{,}0,\varepsilon)u)}{\partial v}v + \frac{\partial(\tilde B_2(0{,}0,\varepsilon)u)}{\partial z}z + a_2(t, v, z, \varepsilon), w = C_1(t)v + C_2(t)z + a_3(t, v, z, \varepsilon).$$

Обозначим $A(t) =$
$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial v}(t, 0, \varepsilon) & O \\ \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial \tilde A_z}{\partial v}(t, 0{,}0, \varepsilon) & \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial z}(\tilde A_2(t, 0{,}0, \varepsilon)z) \end{pmatrix},$$
$$b(u, t) = \begin{pmatrix} F(t, 0, \varepsilon) + \tilde B_1(0{,}0, \varepsilon)u \\ \frac{1}{\varepsilon}\tilde B_2(0{,}0, \varepsilon)u \end{pmatrix},$$
$C(t) = (C_1(t) \quad C_2(t)), C_1(t) = \frac{\partial p}{\partial v}(t, 0{,}0, \varepsilon) + \frac{\partial}{\partial v}(C(t, 0{,}0, \varepsilon)(z + h(t, 0, \varepsilon)), C_2(t) = \frac{\partial}{\partial z}(p(t, 0{,}0, \varepsilon) + C(t, 0{,}0, \varepsilon)(z + h(t, 0, \varepsilon)),$
$p_1(t, u, \varepsilon) =$
$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial v}(\tilde B_1(0{,}0, \varepsilon)u) & \frac{\partial}{\partial z}(\tilde B_1(0{,}0, \varepsilon)u) \\ \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial v}(\tilde B_2(0{,}0, \varepsilon)u) & \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial z}(\tilde B_2(0{,}0, \varepsilon)u) \end{pmatrix}.$$

Запишем линеаризованную систему в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} \dot v \\ \dot z \end{pmatrix} = A(t)\begin{pmatrix} v \\ z \end{pmatrix} + b(u, t) + p_1(t, u, \varepsilon)\begin{pmatrix} v \\ z \end{pmatrix} + o(\|(v \quad z)'\|)p_2(t, u, \varepsilon), w = C(t)\begin{pmatrix} v \\ z \end{pmatrix} + a_3(t, v, z, \varepsilon).$$

Используя теоремы об управляемости и наблюдаемости динамических систем по линейному приближению [10], получаем условия управляемости и наблюдаемости системы (3). Так как система (1) получена из системы (3) с помощью невырожденной замены переменных, то исходная система (1) вполне управляема и вполне наблюдаема.

Пример 1. Рассмотрим модель сингулярно возмущенной системы [11]:

$$\varepsilon \ddot x_i + \frac{2(t^2 - c_i^2 + x_i) - 1}{(1 + t^2 - c_i^2 + x_i)^4}(2t + \dot x_i) = \gamma_i u, i = \overline{1, n}; w = \sum_{k=1}^n h_k x_k,$$

где коэффициенты c_i, γ_i, h_i отличны от нуля. Обозначим $y_i = \dot x_i$, тогда система примет вид

$$\dot x_i = y_i, \varepsilon \dot y_i = -\frac{2(t^2 - c_i^2 + x_i) - 1}{(1 + t^2 - c_i^2 + x_i)^4}(2t + y_i) + \gamma_i u, i = \overline{1, n};$$

$w = \sum_{k=1}^n h_k x_k$. Пусть система удовлетворяет условиям 1)–3), $|u| \leq 1$. Произведем замену переменных:

$$y_i = z_i - 2t + \varepsilon \frac{2(1 + t^2 - c_i^2 + x_i)^4}{2(t^2 - c_i^2 + x_i) - 1} + O(\varepsilon^2),$$
$$x_i = v_i + \frac{2\varepsilon(t^2 - c_i^2 + v_i)z_i}{(1 + t^2 - c_i^2 + v_i)^4} + O(\varepsilon^2), i = \overline{1, n}.$$

В результате получим систему блочно–треугольного вида:

$$\dot v_i = -2t + \frac{2\varepsilon(1 + t^2 - c_i^2 + v_i)^4}{2(t^2 - c_i^2 + v_i) - 1} + \Big(\frac{2(c_i^2 - t^2 - v_i)}{(1 + t^2 - c_i^2 + v_i)^4} + \varepsilon \frac{8(1 + t^2 - c_i^2 + v_i)^7(2(t^2 - c_i^2 + v_i) + 5)}{(2(t^2 - c_i^2 + v_i) - 1)^3 z_i}\Big)\gamma_i u + O(\varepsilon^2), \varepsilon \dot z_i = \Big(\frac{1 - 2(t^2 - c_i^2 + v_i)}{(1 + t^2 - c_i^2 + v_i)^4} - \varepsilon \cdot \frac{8(1 + t^2 - c_i^2 + v_i)^3(2(t^2 - c_i^2 + v_i) - 1) - 4(1 + t^2 - c_i^2 + v_i)^4)}{(2(t^2 - c_i^2 + v_i) - 1)^2} \cdot z_i + \gamma_i u + O(\varepsilon^2), i = \overline{1, n}; w = \sum_{i=1}^n h_i\Big(v_i + \varepsilon \frac{2(t^2 - c_i^2 + v_i)z_i}{(2(t^2 - c_i^2 + v_i) - 1)^3}\Big) + O(\varepsilon^2).$$

Используя теоремы об управляемости и наблюдаемости динамических систем по линейному приближению, получаем, что система блочно–треугольного вида вполне управляемая и вполне наблюдаемая, так как система нулевого приближения вполне управляемая, а система первого приближения вполне наблюдаемая. Так как система блочно–треугольного вида получена из данной с помощью обратимой замены переменных, то данная система является вполне управляемой и вполне наблюдаемой.

Пример 2. Рассмотрим модель системы маятникового типа с вязким трением, зависящим от времени [11]:

$$\varepsilon\ddot{x}_i + a_i(2+e^{-t})\dot{x}_i + b_i\sin x_i = c_i u,\ i=\overline{1,n};\ w=\sum_{k=1}^{n} h_k x_k,$$

где коэффициенты a_i, b_i, c_i, h_i отличны от нуля. Обозначим, $y_i = \dot{x}_i$. Тогда система примет вид: $\dot{x}_i = y_i, \varepsilon\dot{y}_i = -b_i\sin x_i - a_i(2+e^{-t})y_i + c_i u$, $i=\overline{1,n}; w=\sum_{k=1}^{n} h_k x_k$. Пусть система удовлетворяет условиям 1)–3), $|u|\le 1$. Произведем замену переменных: $y_i = z_i - \frac{b_i}{a_i}\cdot\frac{\sin x_i}{2+e^{-t}} - \varepsilon\frac{b_i}{a_i^2}\cdot\frac{\sin x_i}{(2+e^{-t})^3}\left(e^{-t}+\frac{b_i}{a_i}\cos x_i\right) + O(\varepsilon^2), x_i = v_i - \varepsilon\frac{z_i}{a_i(2+e^{-t})} + O(\varepsilon^2), i = \overline{1,n}$. В результате получим систему блочно–треугольного вида:

$$\dot{v}_i = -\frac{b_i}{a_i}\cdot\frac{\sin v_i}{2+e^{-t}} - \varepsilon\frac{b_i}{a_i^2}\cdot\frac{\sin v_i}{(2+e^{-t})^3}\left(e^{-t}+\frac{b_i}{a_i}\cos v_i\right) - \frac{c_i u}{a_i(2+e^{-t})} + O(\varepsilon^2), \varepsilon\dot{z}_i = \left(-a_i(2+e^{-t}) + \varepsilon\frac{b_i}{a_i}\cdot\frac{\cos v_i}{(2+e^{-t})}\right)z_i + c_i u + O(\varepsilon), i=\overline{1,n}; w=\sum_{k=1}^{n} h_k\left(v_k - \varepsilon\frac{z_k}{a_k(2+e^{-t})}\right) + O(\varepsilon^2).$$

Используя теоремы об управляемости и наблюдаемости динамических систем по линейному приближению, получаем, что система блочно–треугольного вида вполне управляемая и вполне наблюдаемая, так как система нулевого приближения вполне управляемая, а система первого приближения вполне наблюдаемая. Так как система блочно–треугольного вида получена из данной с помощью обратимой замены переменных, то данная система является вполне управляемой и вполне наблюдаемой.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе проведено исследование моделей систем, описываемых сингулярно возмущенными системами дифференциальных уравнений и изучены свойства управляемости и наблюдаемости. Проведена декомпозиция моделей управляемых и наблюдаемых неавтономных двухтемповых систем, линейных по быстрой переменной. Изучены свойства управляемости и наблюдаемости неавтономной двухтемповой модели управления давлением системы вязкоупругих тел и системы маятникового типа с вязким трением, зависящим от времени.

Автор выражает глубокую признательность профессору В.А. Соболеву за полезные обсуждения и ценные советы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Калинин, А.И.* Алгоритм асимптотического решения сингулярно возмущенной нелинейной задачи оптимального быстродействия / *А.И. Калинин* // Дифференциальные уравнения. – 1993. – Т. 29. – № 4. – С. 585 –596.
2. *Калинин, А.И.* Алгоритм асимптотического решения задачи терминального управления нелинейной сингулярно возмущенной системой / *А.И. Калинин* // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1993. – Т. 33. – № 12. – С.1762 – 1775.
3. *Богаевский, В.Н.* Алгебраические методы в нелинейной теории возмущений / *В.Н. Богаевский, А.Я. Повзнер*. – М.: Наука, 1987. – 256 с.
4. *Binning H.S., Goodal D.P.* Constrained output feedbacks for singularly perturbed imperfectly known nonlinear systems // J. Franklin Inst. 1999. V. 336. P. 449 – 472.
5. *Биннинг, Х.С.* Управление по выходу неопределенной сингулярно возмущенной нелинейной системы / *Х.С. Биннинг, Д.П. Гуделл* // Автоматика и телемеханика. – 1997. – № 7. – С. 81 – 97.
6. *Воропаева, Н.В.* Геометрическая декомпозиция сингулярно возмущенных систем / *Н.В. Воропаева, В.А. Соболев*. – М.: Физматлит, 2009. – 256 с.
7. *Kokotovic P.V., Khalil H.K., O'Reily J.* Singular Perturbation Methods in Control. Analysis and Design. London etc.: Academic Press, 1986. 371 p.
8. *Васильева, А.Б.* Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений / *А.Б. Васильева, В.Ф. Бутузов*. М.: Высшая школа, 1990. 208 с.
9. *Кононенко, Л.И.* Асимптотические разложения медленных интегральных многообразий / *Л.И. Кононенко, В.А. Соболев* // Сибирский математический журнал. – Т. 35. – 1994. – № 6. – С. 1264–1268.
10. *Габасов, Р.* Качественная теория оптимальных процессов / *Р. Габасов, Ф.М. Кириллова*. – М.: Наука, 1971. – 508 с.
11. *Афанасьев, В.Н.* Математическия теория конструирования систем управления / *В.Н. Афанасьев, В.Б. Колмановский, В.Р. Носов*. – М.: Высшая школа, 2003. – 615 с.

DECOMPOSITION OF MODELS OF CONTROLLABLE AND OBSERVABLE TWOTEMPO SYSTEMS

Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics, Samara, Russia

A method of integral manifold is applied to study of twotempo linear on fast variables systems. The use of this method permits us to solve a problem of decomposition of tworate controllable and observable systems. Controllability and observability of these systems are investigated. The application of the method is illustrated on example.

Keywords: the decomposition of tworate models, integral manifold, controllability, observability, asymptotic expansions.

DOI: 10.37313/1990-5378-2022-24-1-88-91

REFERENCES

1. *Kalinin, A.I.* Algoritm asimptoticheskogo resheniya singulyarno vozmushchennoj nelinejnoj zadachi optimal'nogo bystrodejstviya / A.I. Kalinin // Differencial'nye uravneniya. – 1993. – T. 29. – № 4. – S. 585 –596.
2. *Kalinin, A.I.* Algoritm asimptoticheskogo resheniya zadachi terminal'nogo upravleniya nelinejnoj singulyarno vozmushchennoj sistemoj / A.I. Kalinin // ZHurnal vychislitel'noj matematiki i matematicheskoj fiziki. – 1993. – T. 33. – № 12. – S.1762 – 1775.
3. *Bogaevsky, V.N.* Algebraicheskie metody v nelineynoj teorii vozmyschenij / V.N. Bogaevsky, A.Ya. Povzner. – M.: Nauka, 1987. – 256 s.
4. *Binning H.S., Goodal D.P.* Constrained output feedbacks for singularly perturbed imperfectly known nonlinear systems // J. Franklin Inst. 1999. V. 336. P. 449 – 472.
5. *Binning, H.S.* Upravlenie po vyhodu neopredelennoj singulyarno vozmushchennoj nelinejnoj sistemy / H.S. Binning, D.P. Gudell // Avtomatika i telemekhanika. – 1997. – № 7. – S. 81 – 97.
6. *Voropaeva, N.V.* Geometricheskaya dekompoziciya singulyarno vozmushchennyh sistem / N.V. Voropaeva, V.A. Sobolev. – M.: Fizmatlit, 2009. – 256 s.
7. *Kokotovic P.V., Khalil H.K., O'Reily J.* Singular Perturbation Methods in Control. Analysis and Design. London etc.: Academic Press, 1986. 371 p.
8. *Vasil'eva, A.B.* Asimptoticheskie metody v teorii singulyarnyh vozmushchenij / A.B. Vasil'eva, V.F. Butuzov. M.: Vysshaya shkola, 1990. 208 s.
9. *Kononenko, L.I.* Asimptoticheskie razlozheniya medlennyh integral'nyh mnogoobrazij / L.I. Kononenko, V.A. Sobolev // Sibirskij matematicheskij zhurnal. – T. 35. – 1994. – № 6. – S. 1264–1268.
10. *Gabasov, R.* Kachestvennaya teoriya optimal'nyh processov / R. Gabasov, F.M. Kirillova. – M.: Nauka, 1971. – 508 s.
11. *Afayfs'ev V.N.* Matematicheskaya teoriya konstruirovaniya sistem upravleniya / V.N. Afayfs'ev, V.B. Kolmanovskij, V.R. Nosov. – M.: Vysshaya shkola, 2003. – 615 s.

Marina Semenova, Candidate of Mathematics and Physics, Associate Professor at the Higher Mathematics Department. E-mail: semenova73@bk.ru