УДК 517.9:62-50

ДЕКОМПОЗИЦИЯ МОДЕЛЕЙ ЛИНЕЙНЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ И НАБЛЮДАЕМЫХ ДВУХТЕМПОВЫХ СИСТЕМ

Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики, г. Самара, Россия

Статья поступила в редакцию 15.02.2022

В статье излагается метод декомпозиции линейных двухтемповых систем, основанный на теории интегральных многообразий быстрых и медленных движений. Исследуется управляемость и наблюдаемость таких систем. Приведен пример, иллюстрирующий полученные результаты.

Ключевые слова: декомпозиция линейных двухтемповых систем, интегральное многообразие, управляемость, наблюдаемость, асимптотические разложения.

DOI: 10.37313/1990-5378-2022-24-1-92-96

ВВЕДЕНИЕ

Исследованию свойств управляемости и наблюдаемости линейных двухтемповых систем посвящено большое количество публикаций. В работах [1,2,3,4,5] исследована управляемость и наблюдаемость линейных двухтемповых систем. Асимптотическая устойчивость, управляемость, сильная и слабая управляемость линейных многотемповых автономных систем изучена в работе [6]. Управляемость некоторых линейных автономных разнотемповых систем и множества достижимости изучены в работах [7,8]. Задачи H_∞–оптимального управления сингулярно возмущенной линейной системой изучены в [9]. В [10] построено асимптотическое приближение к решению задачи оптимального быстродействия для линейной автономной сингулярно возмущенной системы. Проблема управляемости и стабилизируемости линейных сингулярно возмущенных систем с запаздыванием исследовалась в [11]. Условия полной управляемости линейных автономных систем с разными степенями малого параметра при производных исследована в работе [8]. Данная работа посвящена изучению свойств управляемости и наблюдаемости двухтемповой линейной системы.

Цель работы:

- Понижение размерности задачи управляемости и наблюдаемости линейной двухтемповой системы так, чтобы модель меньшей размерности с большой степенью точности отражала все свойства исходной системы.
- Получение достаточных условий, управляемости и наблюдаемости сингулярно возмущенных систем.

Семенова Марина Михайловна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики. E-mail: semenova73@bk.ru

РАСЩЕПЛЯЮЩЕЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ

Рассмотрим математическую модель линейной двухтемповой системы:

$$\dot{x}_1 = A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + B_1u, \varepsilon\dot{x}_2 = A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + B_2u, y = C_1x_1 + C_2x_2, \quad (1)$$

где $x_i \in \mathbb{R}^{n_i}$ – переменные состояния, i=1,2, $u \in \mathbb{R}^r$ – управляющие воздействия, y$\in \mathbb{R}^m$ – измеряемая координата, $A_{ij} = A_{ij}(t,\varepsilon), B_i = B_i(t,\varepsilon), C_i = C_i(t,\varepsilon), i,j = 1,2$ – матричные функции соответствующих размерностей, ε – малый положительный параметр $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$, x_1, x_2 – медленная и быстрая переменные, соответственно, $t \in \mathbb{R}$, точка обозначает дифференцирование по t.

Будем предполагать [12], что матрицы $A_{ij}, A_{22}^{-1}(t,0), B_i, C_i$ непрерывны и ограничены вместе с достаточным количеством производных по t и ε при $t \in \mathbb{R}, \varepsilon \in [0,\varepsilon_0]$ и, следовательно, имеют место асимптотические разложения: $A_{ij}(t,\varepsilon) = \sum_{l=0}^{k} \varepsilon^l A_{ij}^{(l)}(t) + \varepsilon^{k+1} A_{ij}^{(k+1)}(t,\varepsilon), B_i(t,\varepsilon) = \sum_{l=0}^{k} \varepsilon^l B_i^{(l)}(t) + \varepsilon^{k+1} B_i^{(k+1)}(t,\varepsilon), C_i(t,\varepsilon) = \sum_{l=0}^{k} \varepsilon^l C_i^{(l)}(t) + \varepsilon^{k+1} C_i^{(k+1)}(t,\varepsilon)$, с гладкими и ограниченными коэффициентами. Предположим, также, что собственные значения $\lambda_i = \lambda_i(t), i = \overline{1,n_2}$ матрицы $A_{22}(t,0)$ удовлетворяют неравенству $Re\,\lambda_i \le -\beta_1 < 0$. Расщепляющее преобразование имеет вид $y_1 = x_1 - \varepsilon H y_2, y_2 = x_2 - L x_1$, где функции $H = H(t,\varepsilon), L = L(t,\varepsilon)$ выбираются из условия, что результирующая дифференциальная система имеет блочно–диагональный вид. Выражая переменные x_1, x_2, произведем последовательную замену переменных в исходной системе. В результате которой получим систему блочно–диагонального вида

$$\dot{y}_1 = A_1 y_1 + \overline{B}_1 u, \varepsilon \dot{y}_2 = A_2 y_2 + \overline{B}_2 u,$$
$$y = \bar{C}_1 y_1 + \bar{C}_2 y_2, \tag{2}$$

где $A_1 = A_{11} + A_{12}L, A_2 = A_{22} - \varepsilon L A_{12}$, $\overline{B}_2 = B_2 - \varepsilon L B_1, \overline{B}_1 = B_1 - H\overline{B}_2, \overline{C}_1 = C_1 + C_2 L, \overline{C}_2 = C_2 + \varepsilon \overline{C}_1 H$. Функции $L = L(t, \varepsilon), H = H(t, \varepsilon)$ могут быть найдены в виде асимптотических разложений $L(t,\varepsilon) = \sum_{k\geq 0} \varepsilon^k L^{(k)}(t), H(t,\varepsilon) = \sum_{k\geq 0} \varepsilon^k H^{(k)}(t)$, из матричных уравнений

$$A_{21} + A_{22}L - \varepsilon \dot{L} - \varepsilon L(A_{11} + A_{12}L) = 0,$$
$$A_{12} + \varepsilon A_1 H - \varepsilon \dot{H} - H A_2 = 0. \tag{3}$$

Коэффициенты в асимптотических разложениях определяются следующим образом: $L^{(0)} = -\left(A_{22}^{(0)}\right)^{-1} A_{21}^{(0)}, H^{(0)} = A_{12}^{(0)} \cdot \left(A_{22}^{(0)}\right)^{-1}, L^{(i)} = -\left(A_{22}^{(0)}\right)^{-1} (A_{21}^{(i)} + \sum_{j=1}^{i} A_{22}^{(j)} \cdot L^{(i-j)} - \dot{L}^{(i-j)} - \sum_{j=0}^{i-1} L^{(i-j-1)} A_1^{(j)}), H^{(i)} = (A_{12}^{(i)} + \sum_{j=0}^{i} A_1^{(j)} H^{(i-j-1)} - \dot{H}^{(i-1)} - \sum_{j=0}^{i} H^{(i-j)} A_2^{(j)})\left(A_{22}^{(0)}\right)^{-1}, i \geq 1;$ где $A_1^{(i)} = A_{11}^{(i)} + \sum_{j=0}^{i} A_{12}^{(j)} L^{(i-j)}, A_2^{(i)} = A_{22}^{(i)} - \sum_{j=0}^{i-1} L^{(i-j-1)} A_{12}^{(j)}$.

УПРАВЛЯЕМОСТЬ И НАБЛЮДАЕМОСТЬ

Управляемость и наблюдаемость линейных неавтономных разнотемповых систем изучена в работе [13]. Исследование управляемости и наблюдаемости линейных автономных систем производится с использованием критерия Калмана.

Пример 1. Рассмотрим модель управления центром тяжести крестокрылого снаряда в боковом движении, которая описывается линейной автономной двухтемповой системой [14]:

$$\dot{\beta} = -0.34\beta + \varphi; \dot{\varphi} = 13.534\beta - 0.305\varphi + u; \dot{\psi} = \varphi; \dot{z}_з = z; \dot{z}_q = -300\beta + 300\psi;$$
$$\varepsilon \dot{z} = -10.6\varphi - 10\psi - 0.001 z_з - 0.03z - 0.23u - 4\varepsilon^2 u, w = c_1\beta + c_2\varphi + c_3\psi + c_4 \cdot z_з + c_5 z_q + c_6 z, \tag{4}$$

коэффициенты $c_i \neq 0, i = \overline{1,6}$. Произведем последовательную замену переменной: $y_2 = z - Lx, y_1 = x - \varepsilon H y_2, x = (\beta \quad \varphi \quad \psi \quad z_з \quad z_q)', y_1 = (y_\beta \quad y_\varphi \quad y_\psi \quad y_з \quad y_q)'$, штрих означает транспонирование. Матричные функции $L = L(\varepsilon), H = H(\varepsilon)$ определяются из матричных уравнений вида (3) $L = (15938.5 \quad 398.5 \quad -368.6 \quad -33.4 \quad 0) + O(\varepsilon^2)$, $H = (0 \quad 0 \quad 0 \quad -40 \quad 0)' + O(\varepsilon^2)$. В результате такой замены, получим систему блочно–диагонального вида:

$$\dot{y}_\beta = -0.34 y_\beta + y_\varphi + O(\varepsilon^2), \dot{y}_\varphi = 13.534 \cdot y_\beta - 0.305 y_\varphi + u + O(\varepsilon^2), \dot{y}_\psi = y_\varphi + O(\varepsilon^2),$$
$$\dot{y}_з = 3273.68 y_\beta - 90949.1 y_\varphi - 370628 y_\psi - 40.02 y_з + 1167.3u + O(\varepsilon^2),$$
$$\dot{y}_q = -300\beta + 300\psi + O(\varepsilon^2), \tag{5}$$
$$\varepsilon \dot{y}_2 = -0.03 y_2 - 0.23u + O(\varepsilon^2), w = (c_1 + 15938.5 c_6) y_\beta + (c_2 + 398.5 c_6) y_\varphi + (c_3 - 368.63 c_6) y_\psi + (c_4 - 33{,}36 c_6) y_з + c_5 y_q + c_6 y_2 + O(\varepsilon^2).$$

Быстрая подсистема нулевого приближения системы (5) является управляемой и наблюдаемой. Медленная подсистема нулевого приближения системы (5) управляемая, так как ранг матрицы управляемости

$$r\begin{pmatrix} 0 & 1 & -0.65 & 13.85 & -17.66 \\ 1 & -0.305 & 13.63 & 4.57 & 180.1 \\ 0 & 1 & -0.305 & 13.627 & 4.57 \\ -7.659 & -353.07 & -214.95 & -4706.33 & 2856.46 \\ 0 & 0 & 0 & 102 & -65.79 \end{pmatrix} = 5.$$

Медленная подсистема нулевого приближения системы (5) наблюдаемая, так как ранг матрицы наблюдаемости полный, т.е. равен 5. Значит, система (5) является управляемой и наблюдаемой. Так как блочно–диагональная система получена из системы (4) с помощью обратимой замены переменных, то данная система (4) является управляемой и наблюдаемой.

Пример 2. Рассмотрим модель системы нелинейных осцилляторов [15]:

$$\varepsilon \ddot{x}_i + a_i(\dot{x}_i^2 + x_i^2 - 1)\dot{x}_i + b_i(1-\varepsilon)x_i = \alpha_i u, i = \overline{1,n}; \varepsilon \ddot{x}_k + d_k \dot{x}_k + \varepsilon h_k(x_k + \dot{x}_k^2) + c_k \sin x_k = \beta_k u, k = \overline{n+1,p}; w = \sum_{j=1}^{p}(\gamma_j x_j + \delta_j \dot{x}_j), \tag{6}$$

где коэффициенты $a_i, b_i, \alpha_i, c_k, d_k, h_k, \beta_k, \gamma_j, \delta_j, i = \overline{1,n}; j = \overline{1,p}; k = \overline{n+1,p}$ отличны от нуля, $\sin x_i \approx x_i$. Обозначим, $y_i = \dot{x}_i, y_k = \dot{x}_k$. Тогда система примет вид:

$$\dot{x}_i = y_i, \dot{x}_k = y_k, \varepsilon \dot{y}_i = b_i(\varepsilon - 1)x_i + a_i(1 - x_i^2 - y_i^2)y_i + \alpha_i u, \varepsilon \dot{y}_k = -c_k \sin x_k - \varepsilon h_k x_k - d_k y_k - \varepsilon h_k y_k^2 + \beta_k u, i = \overline{1,n};$$
$$k = \overline{n+1,p}; \; w = \sum_{j=1}^{p}(\gamma_j x_j + \delta_j y_j).$$

Линеаризуем систему вдоль $x_j \equiv 0, y_j \equiv 0, \; j = \overline{1,p}$. Линейное приближение системы имеет вид:

$$\dot{x}_i = y_i, \dot{x}_k = y_k, \varepsilon \dot{y}_i = b_i(\varepsilon - 1)x_i + a_i y_i + \alpha_i u, \varepsilon \dot{y}_k = (-c_k - h_k \varepsilon)x_k - d_k y_k + \beta_k u,$$
$$d_k > 0, a_i < 0, i = \overline{1,n}; k = \overline{n+1,p}; \; w = \sum_{j=1}^{p}(\gamma_j x_j + \delta_j y_j). \tag{7}$$

Произведем последовательную замену переменных:

$$y_i = z_i + \frac{b_i}{a_i}x_i + \varepsilon\frac{b_i}{a_i}\left(\frac{b_i}{a_i^2} - 1\right)x_i$$

$$+O(\varepsilon^2), y_k = z_k - \frac{c_k}{d_k}x_k - \frac{\varepsilon}{d_k}\left(h_k + \frac{c_k^2}{d_k^2}\right)x_k$$

$$+O(\varepsilon^2), x_j = v_j, i = \overline{1,n}; k = \overline{n+1,p}; j = \overline{1,p}.$$

В результате такой замены получаем систему блочно–диагонального вида:

$$\dot{v}_i = \frac{b_i}{a_i}v_i - \frac{\alpha_i}{a_i}u + O(\varepsilon), \dot{v}_k = -\frac{c_k}{d_k}v_k + \frac{\beta_k}{d_k}\cdot$$

$$u + O(\varepsilon), \varepsilon\dot{z}_i = a_i z_i + \alpha_i u + O(\varepsilon),$$

$$\varepsilon\dot{z}_k = -d_k z_k + \beta_k u + O(\varepsilon), \qquad (8)$$

$$w = \sum_{j=1}^{p}(\gamma_j v_j + \delta_j z_j) + \sum_{i=1}^{n}\frac{b_i}{a_i}v_i -$$

$$-\sum_{k=n+1}^{p}\frac{c_k}{d_k}v_k + O(\varepsilon), i = \overline{1,n}; k = \overline{n+1,p}.$$

Система (8) является управляемой, если $\frac{c_k}{d_k} \neq -\frac{b_i}{a_i}, \forall i,k: i = \overline{1,n}; k = \overline{n+1,p};$ и является наблюдаемой, если $\gamma_i + \frac{b_i}{a_i}, \gamma_k - \frac{c_k}{d_k}, \frac{c_k}{d_k} + \frac{b_i}{a_i},$ не равны нулю одновременно для $\forall i,k: i = \overline{1,n}; k = \overline{n+1,p}.$ Так как система (8) получена из системы (7) с помощью обратимой замены переменной, то система (7), которая является линейным приближением данной системы (6), является управляемой и наблюдаемой при выполнении этих условий. Следовательно, система (6) является управляемой и наблюдаемой по теореме об управляемости и наблюдаемости динамических систем по линейному приближению.

Пример 3. В качестве простого примера управляемой и наблюдаемой системы, рассмотрим модель системы n кривошипно–шатунных механизмов, которая описывается линейной двухтемповой неавтономной системой [16]:

$$\varepsilon\ddot{x}_i + (a_i + b_i\cos 2\pi t)x_i = c_i u, i = \overline{1,n};$$

$w = \sum_{k=1}^{n}h_k x_k,$ где коэффициенты $a_i, b_i, c_i, h_i, i = \overline{1,n}$ отличны от нуля. Обозначим $y_i = \dot{x}_i$. Система примет вид:

$$\dot{x}_i = y_i, \varepsilon\dot{y}_i = -(a_i + b_i\cos 2\pi t)x_i + c_i u,$$

$i = \overline{1,n}; w = \sum_{k=1}^{n}h_k x_k$. Используя критерий управляемости и наблюдаемости, получаем, что система является управляемой и наблюдаемой на отрезке $[t_0, t_1]$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе проведено исследование моделей систем, описываемых сингулярно возмущенными системами дифференциальных уравнений и изучены свойства управляемости и наблюдаемости. Проведена декомпозиция моделей управляемых и наблюдаемых линейных неавтономных двухтемповых систем. Изучены свойства управляемости и наблюдаемости автономной двухтемповой модели крестокрылого снаряда и модели системы маятникового типа.

Автор выражает глубокую признательность профессору В.А. Соболеву за полезные обсуждения и ценные советы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kokotovic P.V., Haddad A.H.* Controllability and time–optimal control of systems with slow and fast models // IEEE Trans. Autom. Control. 1975. V. 20. P. 111–113.
2. *Kokotovic P.V., Khalil H.K., O'Reilly J.* Singular perturbation methods in control. Analysis and Design. London etc.: Academic Press, 1986. 371 p.
3. *Cobb D.* Controllability, observability and duality in singular systems // IEEE Trans. Autom. Control. 1984. V.2. P.1076–1082.
4. *Javid S.H.* Observing the slow states of a singularly perturbed systems // IEEE Trans. Autom. Control. 1980. V. 25. P. 277–280.
5. *O'Reilly J.* Full order observers for a class of singularly perturbed linear time varying systems // Int. J. Control. 1979. V. 30. P. 745–756.
6. *Abed E.H., Silva–Madriz R.I.* Controllability of multiparameter singularly perturbed systems // ISR Technical Reports for 1988, TR 88–73. 1988. V. VIII. P. 137–140.
7. *Дмитриев, М.Г.* Теория сингулярных возмущений и некоторые задачи оптимального управления / М.Г. Дмитриев // Дифференциальные уравнения. – 1985. – Т. 21. – № 10. – С. 1693–1698.
8. *Курина, Г.А.* О полной управляемости разнотемповых сингулярно возмущенных систем / Г.А Курина // Матем. заметки. – 1992. – Т. 52. – № 6. – С. 56–61.
9. *Gajic Z., Lim M.* Optimal control of singularly perturbed linear systems and applications. High–Accuracy Techniques. Marcel Dekker 2000. Control Engineering series. 312 p.
10. *Калинин, А.И.* Алгоритм асимптотического решения сингулярно возмущенной линейной задачи оптимального быстродействия / А.И. Калинин // Прикл. математика и механика. – 1989. – Т.53. – Вып. 6. – С. 880–889.
11. *Копейкина, Т.Б.* К проблеме стабилизации линейных сингулярно возмущенных систем с запаздыванием / Т.Б. Копейкина // Докл. НАН Беларуси. – 1998. – Т. 42. – № 3. – С. 22–27.
12. *Соболев, В.А.* Разделение движений методом интегральных многообразий / В.А. Соболев, В.В. Стрыгин. М.: Наука, 1988. 256 с.
13. *Семенова, М.М.* Управляемость и наблюдаемость многотемповых систем / В кн.: Н.В. Воропаева, В.А. Соболев. Геометрическая декомпозиция сингулярно возмущенных систем. – М.: Физматлит, 2009. – С. 153–172.
14. *Доброленский, Ю.П.* Автоматика управляемых снарядов / Ю.П. Доброленский, В.И. Иванова, Г.С. Поспелов. М. Оборониздат.1963. 386 с.
15. *Богаевский, В.Н.* Алгебраические методы в нелинейной теории возмущений / В.Н. Богаевский, А.Я. Повзнер. М.: Наука, 1987. 256 с.
16. *Жарикова, Е.Н.* Оптимальные периодические системы управления с сингулярными возмущениями / Е.Н. Жарикова, В.А. Соболев // Автоматика и телемеханика. 1997. № 7. С. 151–168.

DECOMPOSITION OF MODELS OF LINEAR CONTROLLABLE AND OBSERVABLE TWOTEMPO SYSTEMS

© 2022 M.M. Semenova

Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics, Samara, Russia

A method of integral manifold is applied to study of linear twotempo systems. The use of this method permits us to solve a problem of decomposition of tworate controllable and observable systems. Controllability and observability of these systems are investigated. The application of the method is illustrated on example.

Keywords: the decomposition of linear tworate models, integral manifold, controllability, observability, asymptotic expansions.

DOI: 10.37313/1990-5378-2022-24-1-92-95

REFERENCES

1. *Kokotovic P.V., Haddad A.H.* Controllability and time–optimal control of systems with slow and fast models// IEEE Trans. Autom. Control. 1975. V. 20. P. 111–113.
2. *Kokotovic P.V., Khalil H.K., O'Reilly J.* Singular perturbation methods in control. Analysis and Design. London etc.: Academic Press, 1986. 371 p.
3. *Cobb D.* Controllability, observability and duality in singular systems // IEEE Trans. Autom. Control. 1984. V.2. P.1076–1082.
4. *Javid S.H.* Observing the slow states of a singularly perturbed systems // IEEE Trans. Autom. Control. 1980. V. 25. P. 277–280.
5. *O'Reilly J.* Full order observers for a class of singularly perturbed linear time varying systems // Int. J. Control. 1979. V. 30. P. 745–756.
6. *Abed E.H., Silva–Madriz R.I.* Controllability of multiparameter singularly perturbed systems // ISR Technical Reports for 1988, TR 88–73. 1988. V. VIII. P. 137–140.
7. *Dmitriev, M.G.* Teoriya singulyarnyh vozmushchenij i nekotorye zadachi optimal'nogo upravleniya / M.G. Dmitriev // Differencial'nye uravneniya. – 1985. – T. 21. – № 10. – S. 1693–1698.
8. *Kurina, G.A.* O polnoj upravlyaemosti raznotempovyh singulyarno vozmushchennyh sistem / G.A Kurina // Matem. zametki. – 1992. – T. 52. – № 6. – S. 56–61.
9. *Gajic Z., Lim M.* Optimal control of singularly perturbed linear systems and applications. High–Accuracy Techniques. Marcel Dekker 2000. Control Engineering series. 312 p.
10. *Kalinin, A.I.* Algoritm asimptoticheskogo resheniya singulyarno vozmushchennoj linejnoj zadachi optimal'nogo bystrodejstviya / A.I. Kalinin // Prikl. matematika i mekhanika. – 1989. – T.53. – Vyp. 6. – S. 880–889.
11. *Kopejkina, T.B.* K probleme stabilizacii linejnyh singulyarno vozmushchennyh sistem s zapazdyvaniem / T.B. Kopejkina // Dokl. NAN Belarusi. – 1998. – T. 42. – № 3. – S. 22–27.
12. *Sobolev, V.A.* Razdelenie dvizhenij metodom integral'nyh mnogoobrazij / V.A. Sobolev, V.V. Strygin. M.: Nauka, 1988. 256 s.
13. *Semenova, M.M.* Upravlyaemost' i nablyudaemost' mnogotempovyh sistem / V kn.: N.V. Voropaeva, V.A. Sobolev. Geometricheskaya dekompoziciya singulyarno vozmushchennyh sistem. – M.: Fizmatlit, 2009. – S. 153–172.
14. *Dobrolenskij, YU.P.* Avtomatika upravlyaemyh snaryadov / YU.P. Dobrolenskij, V.I. Ivanova, G.S. Pospelov. M. Oboronizdat.1963. 386 s.
15. *Bogaevskij, V.N.* Algebraicheskie metody v nelinejnoj teorii vozmushchenij / V.N. Bogaevskij, A.YA. Povzner. M.: Nauka, 1987. 256 s.
16. *ZHarikova, E.N.* Optimal'nye periodicheskie sistemy upravleniya s singulyarnymi vozmushcheniyami / E.N. ZHarikova, V.A. Sobolev // Avtomatika i telemekhanika. 1997. № 7. S. 151–168.

Marina Semenova, Candidate of Mathematics and Physics, Associate Professor at the Higher Mathematics Department. E-mail: semenova73@bk.ru