УДК 517.9 : 62-50

ДИССИПАТИВНОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ ТРЕХТЕМПОВЫХ СИСТЕМ

© 2022 М.М. Семенова

Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики, г. Самара, Россия

Статья поступила в редакцию 15.04.2022

В статье излагается метод определения функции запаса. Исследуется диссипативность трехтемповых систем. Приведен пример, иллюстрирующий полученные результаты.

Ключевые слова: линейная трехтемповая система, функция запаса, диссипативная система относительно функции расхода.

DOI: 10.37313/1990-5378-2022-24-2-58-63

ВВЕДЕНИЕ

Исследованию свойств пассивных и диссипативных нелинейных систем посвящено большое количество публикаций. Это объясняется широким спектром приложений таких систем: гидродинамика, электроэнергетика, радиотехника, динамика полета и др. Общее понятие диссипативной системы введено в работах [1,2]. Понятие диссипативности по Виллемсу означает, что решения системы удовлетворяют интегральной связи с некоторым функционалом (функционалом расхода) от входа и выхода системы; им показано, что в этом случае на пространстве состояний системы можно определить функцию, которая при определенных условиях будет играть роль функции Ляпунова системы. Таким образом, понятие диссипативной системы позволило рассматривать устойчивость системы по Ляпунову и устойчивость в смысле конечности нормы вход-выходных отображений [3]. В работах [4,5] развиты методы теории диссипативных систем. В обзоре [6] рассматриваются некоторые результаты, касающиеся анализа и синтеза управления нелинейными системами на основе понятий пассивности и диссипативности. Условия пассивности в задаче стабилизации нелинейных систем с помощью обратной связи получены в работе [7].

Данная работа посвящена исследованию диссипативности линейных трехтемповых систем относительно функции расхода. Цель работы – найти функцию запаса линейной трехтемповой системы.

ДИССИПАТИВНЫЕ СИСТЕМЫ

Рассмотрим модель линейной трехтемповой системы вида:

$$\prod_{k=0}^{2} \varepsilon_k \dot{x}_i = \sum_{j=0}^{2} A_{ij} x_j + B_i u, i = \overline{0,2};$$
$$y = \sum_{j=0}^{2} C_j x_j, \qquad (1)$$

где

$t \in \mathbb{R}, x_i \in \mathbb{R}^{n_i}, u \in \mathbb{R}^r, y \in \mathbb{R}^p, A_{ij}, B_i, \ C_j, i,j = \overline{0,2}$ – постоянные матрицы соответствующих размерностей, $\varepsilon_i, i = 1,2$ – малые положительные параметры, $\varepsilon_0 = 1$; и функция расхода $w(u,y) = y'Qy + 2y'Su + u'Ru$, где Q, S, R – постоянные матрицы, причем Q, R – симметрические, штрих означает транспонирование.

Определение 1. Вещественно-значимая функция $w: \mathbb{R}^{n_0+n_1+n_2} \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ такая, что для любого $t \geq 0$, любого начального состояния $x(0) = x^0$ и любого допустимого управления $u(\cdot)$ выполняется $\int_0^t \left| w\left(\Phi(x^0, s, u), u(s), y(s)\right)\right| ds < +\infty$, называется функцией расхода системы (1).

Определение 2. Система (1) называется диссипативной относительно функции расхода w, если существует функция $V: \mathbb{R}^{n_0+n_1+n_2} \to \mathbb{R}^+, V \in C^0$ такая, что для любых $x(0) = x^0$, для любых допустимых управлений $u(\cdot)$ и для любого $t \geq 0$ выполняется неравенство

$$V(x^1) \leq V(x^0) + \int_0^t w(x(s), u(s), y(s)) ds,$$

где $x^1 = \Phi(x^0, t, u)$. Функция V называется функцией запаса системы (1), а неравенство называется неравенством диссипации.

Пусть для системы (1) выполняются предположения, аналогичные условиям $A_1 - A_4$, приведенные в работе [6]:

Для любого $x(t_0) = x^0$ и любого допустимого $u(\cdot)$ существует единственное решение системы (1). Это решение определено на $[t_0, +\infty)$ и таково, что $y(\cdot)$ – локально-интегрируемая с квадратом функция.

Семенова Марина Михайловна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики. E-mail: semenova73@bk.ru

Система (1) глобально достижима из начала координат. Это означает, что для любых $x^1 \in \mathbb{R}^{n_0+n_1+n_2}, t_1$ существуют $t_0 \le t_1$ и такие, что $\Phi(x(0), t_1 - t_0, u) = x^1$.

Введем функцию доступного запаса $V_a(x_0) = -\inf_{u,T>0} \int_0^T w(u,y)dt$, которая предполагается дифференцируемой по x.

Функция расхода w удовлетворяет условию: для любого $y \neq 0$ найдется u такое, что $w(u,y) < 0$.

Собственные значения $\lambda_i, i = \overline{1, n_2}$ матрицы A_{22} удовлетворяют неравенству $Re\, \lambda_i(A_{22}) \le -2\beta < 0$.

Для построения функции запаса $\phi(x) = x'Px, x = (x_0 \quad x_1 \quad x_2)'$ запишем необходимые и достаточные условия диссипативности [8] системы (1) относительно функции расхода w:

$$\varepsilon_1\varepsilon_2 \frac{\partial\phi}{\partial x_0}\sum_{i=0}^2 A_{0i}x_i + \varepsilon_2 \frac{\partial\phi}{\partial x_1}\sum_{i=0}^2 A_{1i}x_i + \frac{\partial\phi}{\partial x_2}\cdot \sum_{i=0}^2 A_{2i}x_i = \varepsilon_1\varepsilon_2[\sum_{i=0}^2 x_i'C_i'Q\sum_{i=0}^2 C_ix_i - (x_0' \quad x_1' \quad x_2')F'F\begin{pmatrix}x_0\\x_1\\x_2\end{pmatrix}], \frac{1}{2}(\varepsilon_1\varepsilon_2\frac{\partial\phi}{\partial x_0}B_0 + \varepsilon_2\frac{\partial\phi}{\partial x_1}B_1 + \frac{\partial\phi}{\partial x_2}B_2) = \varepsilon_1\varepsilon_2[\sum_{i=0}^2 x_i'C_i'S + (x_0' \quad x_1' \quad x_2')F'W], R = W'W.$$

При $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$, получим систему

$$\frac{\partial\phi}{\partial x_2}\sum_{j=0}^2 A_{2j}x_j = 0, \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial\phi}{\partial x_2}B_2 = 0, \ R = W'W.$$

Матрицу P будем искать в виде $P = \begin{pmatrix} P_{11} & \varepsilon_1 P_{12} & \varepsilon_1\varepsilon_2 P_{13} \\ \varepsilon_1 P_{12}' & \varepsilon_1 P_{22} & \varepsilon_1\varepsilon_2 P_{23} \\ \varepsilon_1\varepsilon_2 P_{13}' & \varepsilon_1\varepsilon_2 P_{23}' & \varepsilon_1\varepsilon_2 P_{33}\end{pmatrix}$, где

$P_{ij} = P_{ij}^{0,0} + \varepsilon_1 P_{ij}^{1,0} + \varepsilon_2 P_{ij}^{0,1} + \varepsilon_1\varepsilon_2 P_{ij}^{1,1} + \varepsilon_1^2 P_{ij}^{2,0} + \varepsilon_2^2 P_{ij}^{0,2} + \cdots, i,j = 1,2,3.$ Полагая, что матрица W квадратная невырожденная матрица, из второго уравнения, получим $F' = (PB - C'S)W^{-1}$, пусть $K = W^{-1}$ и подставив в первое уравнение, получим уравнение Лурье $PH + H'P - PLP + M = 0, H = (h_{ij}), h_{ij} = \frac{B_iKK'S'C_j - A_{ij}}{\prod_{k=0}^{i}\varepsilon_k}; L = (l_{ij}),$

$$l_{ij} = \frac{B_iKK'B_j'}{\prod_{k=0}^{i}\varepsilon_k\prod_{l=1}^{j}\varepsilon_l};\ M = (m_{ij}), m_{ij} = C_i'\cdot (Q - SKK'S')C_j, i,j = \overline{0,2}.$$

Уравнение Лурье имеет единственное положительно определенное решение. Обозначим, $T^{0,0} = K^{0,0}(K^{0,0})', T^{1,0} = K^{0,0}(K^{1,0})' + K^{1,0}(K^{0,0})', T^{0,1} = K^{0,0}(K^{0,1})' + K^{0,1}(K^{0,0})',$
$T^{1,1} = K^{0,0}(K^{1,1})' + K^{1,0}(K^{0,1})' + K^{0,1}\cdot (K^{1,0})' + K^{1,1}(K^{0,0})', T^{2,0} = K^{0,0}(K^{2,0})' + K^{1,0}(K^{1,0})' + K^{2,0}(K^{0,0})', T^{0,2} = K^{0,0}\cdot (K^{0,2})' + K^{0,1}(K^{0,1})' + K^{0,2}(K^{0,0})', \ldots$

Выполняя действия и приравнивая соответствующие элементы матриц, получим систему 6 линейно независимых уравнений. Система нулевого приближения имеет вид:

$$\sum_{j=1}^3[P_{1j}^{0,0}(A_{j-1,k}^0 - B_{j-1}T^{0,0}\cdot \sum_{j=l}^3 B_{j-1}'(P_{lj}^{0,0})')] + \sum_{j=l}^3(A_{j-1,0}^0)'(P_{lj}^{0,0})' + C'_0(Q - ST^{0,0}S')C_k = 0, k = \overline{0,2}, l = \overline{1,3};$$

$$\sum_{j=2}^3[P_{2j}^{0,0}((A_{j-1,k}^0) - B_{j-1}T^{0,0}\sum_{j=l}^3 B_{j-1}'\cdot (P_{lj}^{0,0})')] + \sum_{j=l}^3(A_{j-1,1}^0)'(P_{lj}^{0,0})' + C_1'(Q - ST^{0,0}S')C_k = 0, k = 1,2, l = 2,3;$$

$$P_{33}^{0,0}(A_{22}^0 - B_2T^{0,0}B_2'P_{33}^{0,0}) + (A_{22}^0)'P_{33}^{0,0} + C_2'(Q - ST^{0,0}S')C_2 = 0, A_{ij}^0 = B_iT^{0,0}S'C_j - A_{ij}, i,j = 0,1,2.$$

Последнее уравнение этой системы – уравнение Лурье, положительно определенное решение которого существует и единственно [9], $P_{33}^{0,0} = L_{33}^{0,0}$. Подставим это решение в третье и пятое уравнения системы, которые примут вид:

$$P_{11}^{0,0}A_{02}^1 + P_{12}^{0,0}A_{12}^1 + P_{13}^{0,0}A_{22}^1 + (A_{20}^0)'L_{33}^{0,0} + C_0'(Q - ST^{0,0}S')C_2 = 0, P_{22}^{0,0}A_{12}^1 + P_{23}^{0,0}\cdot A_{22}^1 + (A_{21}^0)'L_{33}^{0,0} + C_1'(Q - ST^{0,0}S')C_2 = 0,$$

где $A_{i2}^1 = A_{i2}^0 - B_iT^{0,0}B_2'L_{33}^{0,0}, i = 0,1,2.$ Из пятого уравнения, получим $P_{23}^{0,0} = (C_1'(S\cdot T^{0,0}S' - Q)C_2 - (A_{21}^0)'L_{33}^{0,0} - P_{22}^{0,0}A_{12}^1)\cdot(A_{22}^1)^{-1}.$ Подставив $P_{23}^{0,0}$ в четвертое уравнение, получим уравнение Лурье:

$P_{22}^{0,0}A + A'P_{22}^{0,0} - P_{22}^{0,0}BP_{22}^{0,0} + C = 0,$ где

$$A = A_{11}^0 - A_{12}^1(A_{22}^1)^{-1}A_{21}^0 - B_1T^{0,0}B_2'((A_{22}^1)')^{-1}(C_2'(S\cdot T^{0,0}S' - Q)C_1 - L_{33}^{0,0}A_{21}^0) - A_{12}^1(A_{22}^1)^{-1}B_2\cdot T^{0,0}B_2'((A_{22}^1)')^{-1}(C_2'(ST^{0,0}S' - Q)C_1 - L_{33}^{0,0}A_{21}^0),$$

$$B = B_1T^{0,0}B_1' - A_{12}^1(A_{22}^1)^{-1}B_2\cdot T^{0,0}B_1' - B_1T^{0,0}B_2'((A_{22}^1)')^{-1}(A_{21}^1)' + A_{12}^1\cdot(A_{22}^1)^{-1}B_2T^{0,0}B_2'((A_{22}^1)')^{-1}(A_{12}^1)', C = (C_1'\cdot(ST^{0,0}S' - Q)C_2 - (A_{21}^0)'L_{33}^{0,0})(A_{22}^1)^{-1}A_{21}^0 + (A_{21}^0)'((A_{22}^1)')^{-1}(C_2'(ST^{0,0}S' - Q)C_1 - L_{33}^{0,0}A_{21}^0) - (C_1'(ST^{0,0}S' - Q)C_2 - (A_{21}^0)'\cdot L_{33}^{0,0})(A_{22}^1)^{-1}B_2T^{0,0}B_2'((A_{22}^1)')^{-1}(C_2'(ST^{0,0}S' - Q)C_1 - L_{33}^{0,0}A_{21}^0) + C_1'(Q - ST^{0,0}S')C_1.$$

Это уравнение имеет единственное положительно определенное решение $P_{22}^{0,0} = L_{22}^{0,0}$. Значит, $P_{23}^{0,0} = L_{23}^{0,0} = L_{23}^{0,0}\left(L_{22}^{0,0}, L_{33}^{0,0}\right)$. Подставим найденные решения во второе и третье уравнения. Из третьего уравнения найдем $P_{13}^{0,0} = (C_0'(ST^{0,0}S' - Q)C_2 - (A_{20}^0)'L_{33}^{0,0} - P_{11}^{0,0}A_{02}^1 - P_{12}^{0,0}A_{12}^1)(A_{22}^1)^{-1}$. Подставим во второе уравнение, получим $P_{11}^{0,0}A_{01}^1 + P_{12}^{0,0}A_{11}^1 + D\left(L_{22}^{0,0}, L_{33}^{0,0}\right) = 0$, $A_{i1}^1 = A_{i1}^0 - A_{i2}^1(A_{22}^1)^{-1}A_{21}^0 + (A_{i2}^1(A_{22}^1)^{-1} \cdot B_2T^{0,0} - B_iT^{0,0})(B_1'L_{22}^{0,0} + B_2'(L_{23}^{0,0})'), i = 0,1;$

$$D\left(L_{22}^{0,0}, L_{33}^{0,0}\right) = (C_0'(ST^{0,0}S' - Q)C_2 - (A_{20}^0)'L_{33}^{0,0})(A_{22}^1)^{-1}(A_{21}^0 - B_2T^{0,0}(B_1'L_{22}^{0,0} + B_2'\left(L_{23}^{0,0}\right)') + (A_{10}^0)'L_{22}^{0,0} + (A_{20}^0)'\left(L_{23}^{0,0}\right)' - C_0'(Q - ST^{0,0}S')C_1.$$

Выразим из этого уравнения $P_{12}^{0,0} = (-D - P_{11}^{0,0}A_{01}^1)(A_{11}^1)^{-1}$, и подставим в первое уравнение, в результате получим уравнение Лурье: $P_{11}^{0,0}A_{00}^1 + (A_{00}^1)'P_{11}^{0,0} - P_{11}^{0,0}B^{0,0}P_{11}^{0,0} + H^{0,0} = 0, A_{00}^1 = A_{00}^0 - A_{01}^1(A_{11}^1)^{-1}(A_{10}^0 + A_{12}^1(A_{22}^1)^{-1} \cdot A_{20}^0) - A_{02}^1(A_{22}^1)^{-1}A_{20}^0 - [B_0T^{0,0}B_1' \cdot ((A_{11}^1)')^{-1} - A_{01}^1(A_{11}^1)^{-1}(B_1T^{0,0}B_1' + A_{12}^1 \cdot (A_{22}^1)^{-1}B_2T^{0,0}B_1'((A_{11}^1)')^{-1}) - A_{02}^1(A_{22}^1)^{-1} \cdot B_2T^{0,0}B_1'((A_{11}^1)')^{-1}] \cdot [C_1'(ST^{0,0}S' - Q)C_0 - ((A_{21}^0)' + (L_{22}^{0,0}B_1 + L_{33}^{0,0}B_2)T^{0,0}B_2') \cdot ((A_{22}^1)')^{-1}(C_2'(ST^{0,0}S' - Q)C_0 - L_{33}^{0,0}A_{20}^0) - L_{22}^{0,0}A_{10}^0 - L_{23}^{0,0}A_{20}^0] - [B_0 - A_{01}^1(A_{11}^1)^{-1} \cdot (B_1 + A_{12}^1(A_{22}^1)^{-1}B_2) - A_{02}^1(A_{22}^1)^{-1}B_2]T^{0,0} \cdot B_2'((A_{22}^1)')^{-1}[C_2'(ST^{0,0}S' - Q)C_0 - L_{33}^{0,0}A_{20}^0 - (A_{12}^1)'((A_{11}^1)')^{-1}(C_1'(ST^{0,0}S' - Q)C_0 - ((A_{21}^0)' + (L_{22}^{0,0}B_1 + L_{23}^{0,0}B_2)T^{0,0}B_2') \cdot (A_{22}^1)^{-1}(C_2'(ST^{0,0}S' - Q)C_0 - L_{33}^{0,0}A_{20}^0) - L_{22}^{0,0}A_{10}^0 - L_{23}^{0,0}A_{20}^0)], B^{0,0} = (B_0 - A_{01}^1 \cdot (A_{11}^1)^{-1}B_1 - A_{02}^2(A_{22}^1)^{-1}B_2)T^{0,0}(B_0' - B_1' \cdot ((A_{11}^1)')^{-1}(A_{01}^1)' + B_2'((A_{22}^1)')^{-1}(A_{02}^2)'), A_{02}^2 = A_{02}^1 - A_{01}^1(A_{11}^1)^{-1}A_{12}^1, H^{0,0}$ – все слагаемые, не содержащие $P_{11}^{0,0}$. Это уравнение имеет единственное положительно определенное решение $P_{11}^{0,0} = L_{11}^{0,0}$, из которого получаем

$$P_{1j}^{0,0} = L_{1j}^{0,0}, L_{1j}^{0,0} = L_{1j}^{0,0}(L_{11}^{0,0}, L_{22}^{0,0}, L_{33}^{0,0}), j = 2,3.$$

Приравнивая коэффициенты при первых степенях малых параметров ε_1 и ε_2, получим систему линейных уравнений: $\sum_{j=1}^3 P_{1j}^{l_1,l_2} A_{j-1,k}^{1(k+1)} + \sum_{j=1}^3\left(A_{j-1,0}^{1(1)}\right)'\left(P_{k+1,j}^{l_1,l_2}\right)' = V_{1,k+1}^{l_1,l_2}, k = \overline{0,2};$

$$\sum_{j=2}^3 P_{2j}^{l_1,l_2} A_{j-1,k}^{1(k+1)} + \sum_{j=k+1}^3\left(A_{j-1,1}^{1(2)}\right)' \cdot \left(P_{k+1,j}^{l_1,l_2}\right)' = V_{2,k+1}^{l_1,l_2}, k = 1,2;\ P_{33}^{l_1,l_2}A_{22}^{1(3)} + \left(A_{22}^{1(3)}\right)'P_{33}^{l_1,l_2} = V_{33}^{l_1,l_2}, l_1 + l_2 = 1, l_1 \neq l_2,$$

$l_i \in \{0,1\}, i = 1,2$, где $A_{i0}^{1(1)} = A_{i0}^0 - B_iT^{0,0} \cdot (B_0'L_{11}^{0,0} + B_1'\left(L_{12}^{0,0}\right)' + B_2'\left(L_{13}^{0,0}\right)'), A_{i1}^{1(2)} = A_{i1}^0 - B_iT^{0,0}(B_1'L_{22}^{0,0} + B_2'\left(L_{23}^{0,0}\right)'), A_{i2}^{1(3)} = A_{i2}^0 - B_iT^{0,0}B_2'L_{33}^{0,0}, i = \overline{0,2}; V_{ij}^{l,p}$ – постоянные матрицы. Из двух последних уравнений этой системы, получаем $P_{33}^{1,0} = L_{33}^{1,0}$, $P_{33}^{0,1} = L_{33}^{0,1}$. Потребуем, чтобы матрицы $L_{33}^{1,0}$ и $L_{33}^{0,1}$ были положительно определены. Из девятого и десятого уравнения выразим $P_{23}^{l_1,l_2} = \left(V_{23}^{l_1,l_2*} - P_{22}^{l_1,l_2}A_{12}^{1(3)}\right) \cdot \left(A_{22}^{1(3)}\right)^{-1}, V_{23}^{l_1,l_2*} = V_{23}^{l_1,l_2} - \left(A_{21}^{1(2)}\right)'L_{33}^{l_1,l_2};$

$$P_{13}^{l_1,l_2} = (V_{13}^{l_1,l_2*} - P_{11}^{l_1,l_2}A_{02}^{1(3)} - P_{12}^{l_1,l_2}A_{12}^{1(3)}) \cdot \left(A_{22}^{1(3)}\right)^{-1},$$

$$V_{13}^{l_1,l_2*} = V_{13}^{l_1,l_2} - \left(A_{20}^{1(1)}\right)'L_{33}^{l_1,l_2}, l_1 + l_2 = 1, l_1 \neq l_2, l_i \in \{0,1\}, i = 1,2.$$

Подставим эти выражения в седьмое и восьмое уравнения системы, получим:

$$P_{22}^{l_1,l_2}A_{11}^{1(4)} + \left(A_{11}^{1(4)}\right)'P_{22}^{l_1,l_2} = V_{22}^{l_1,l_2*}, A_{11}^{1(4)} = A_{11}^{1(2)} - A_{12}^{1(3)}\left(A_{22}^{1(3)}\right)^{-1}A_{21}^{1(2)}, V_{22}^{l_1,l_2*} = V_{22}^{l_1,l_2} - (V_{23}^{l_1,l_2} - \left(A_{01}^{1(2)}\right)'L_{33}^{l_1,l_2})\left(A_{22}^{1(3)}\right)^{-1}A_{21}^{1(2)} + \left(A_{21}^{1(2)}\right)'\left(\left(A_{22}^{1(3)}\right)'\right)^{-1}((V_{23}^{l_1,l_2})' - L_{33}^{l_1,l_2} \cdot A_{01}^{1(2)}), l_1 + l_2 = 1, l_1 \neq l_2, l_i \in \{0,1\}, i = 1,2.$$

Эти линейные уравнения с невырожденной матрицей имеют единственное решение $P_{22}^{1,0} = L_{22}^{1,0}$, $P_{22}^{0,1} = L_{22}^{0,1}$. Потребуем, чтобы эти матрицы были положительно определены. Подставим найденные решения в третье и четвертое уравнения, получим линейные уравнения:

$$P_{11}^{l_1,l_2}A_{01}^{1(4)} + P_{12}^{l_1,l_2}A_{11}^{1(4)} = V_{12}^{l_1,l_2*}, A_{01}^{1(4)} = A_{01}^{1(2)} - A_{02}^{1(3)}\left(A_{22}^{1(3)}\right)^{-1}A_{22}^{1(2)}, V_{12}^{l_1,l_2*} = V_{12}^{l_1,l_2} - V_{13}^{l_1,l_2*}\left(A_{22}^{1(3)}\right)^{-1}A_{21}^{1(2)} - \left(A_{20}^{1(1)}\right)' \cdot \left(\left(A_{22}^{1(3)}\right)'\right)^{-1}(V_{23}^{l_1,l_2*})' - (\left(A_{10}^{1(1)}\right)' - \left(A_{20}^{1(1)}\right)'\left(\left(A_{22}^{1(3)}\right)'\right)^{-1}\left(A_{12}^{1(3)}\right)')L_{22}^{1,0}.$$

Отсюда,

$$P_{12}^{l_1,l_2} = \left(V_{12}^{l_1,l_2*} - P_{11}^{l_1,l_2}A_{01}^{1(4)}\right)\left(A_{11}^{1(4)}\right)^{-1},$$

$l_1 + l_2 = 1, l_1 \neq l_2, l_i \in \{0,1\}, i = 1,2.$ Подставим найденные решения в первое и второе уравнения, получим два линейных уравнения

$$P_{11}^{l_1,l_2} A_{00}^{1(4)} + \left(A_{00}^{1(4)}\right)' P_{11}^{l_1,l_2} = V_{11}^{l_1,l_2*}, A_{00}^{1(4)} =$$

$$= A_{00}^{1(1)} - A_{01}^{1(4)} \left(A_{11}^{1(4)}\right)^{-1} A_{10}^{1(1)} - (A_{02}^{1(3)} -$$

$A_{01}^{1(4)} \left(A_{11}^{1(4)}\right)^{-1} A_{12}^{1(3)}) \left(A_{22}^{1(3)}\right)^{-1} A_{20}^{1(1)}$. Отсюда,

$P_{11}^{l_1,l_2} = L_{11}^{l_1,l_2}, l_1 + l_2 = 1, l_1 \neq l_2, l_i \in \{0,1\}, i = 1,2,$ и т. д. Приравнивая коэффициенты при $\varepsilon_1^k, \varepsilon_1^{k-1}\varepsilon_2, \dots, \varepsilon_2^k$, получим следующую систему $6(k+1)$ линейных уравнений

$$\sum_{j=1}^3 P_{1j}^{l_1,l_2} A_{j-1,m}^{1(m+1)} + \sum_{j=m+1}^3 \left(A_{j-1,0}^{1(1)}\right)' \cdot$$

$$\left(P_{m+1,j}^{l_1,l_2}\right)' = V_{1,m+1}^{l_1,l_2}, m = \overline{0,2};\ \sum_{j=2}^3 P_{2j}^{l_1,l_2} \cdot$$

$$A_{j-1,m}^{1(m+1)} + \sum_{j=m+1}^3 \left(A_{j-1,1}^{1(2)}\right)' \left(P_{m+1,j}^{l_1,l_2}\right)' =$$

$$V_{2,m+1}^{l_1,l_2}, m = 1,2;\ P_{33}^{l_1,l_2} A_{22}^{1(3)} + \left(A_{22}^{1(3)}\right)' P_{33}^{l_1,l_2}$$

$= V_{33}^{l_1,l_2}, l_1 + l_2 = k, l_i \geq 0, l_i \in \mathbb{Z}_+$. Из последних $(k+1)$ уравнений находим $P_{33}^{k,0} = L_{33}^{k,0}, P_{33}^{k-1,1} = L_{33}^{k-1,1}, \dots, P_{33}^{0,k} = L_{33}^{0,k}$. Выполняя те же действия, что и для «первого» приближения, найдем все остальные неизвестные последней системы, при этом требуем, чтобы все блоки, стоящие на главной диагонали матрицы P были положительно определены. Таким образом, элементы матрицы P могут быть найдены как асимптотические разложения по малым параметрам $\varepsilon_1, \varepsilon_2$: $P =$

$$\begin{pmatrix} L_{11}^{0,0} + \cdots & \varepsilon_1(L_{12}^{0,0} + \cdots) & \varepsilon_1\varepsilon_2(L_{13}^{0,0} + \cdots) \\ \varepsilon_1((L_{12}^{0,0})' + \cdots) & \varepsilon_1(L_{22}^{0,0} + \cdots) & \varepsilon_1\varepsilon_2(L_{23}^{0,0} + \cdots) \\ \varepsilon_1\varepsilon_2((L_{13}^{0,0})' + \cdots) & \varepsilon_1\varepsilon_2((L_{23}^{0,0})' + \cdots) & \varepsilon_1\varepsilon_2(L_{33}^{0,0} + \cdots) \end{pmatrix}.$$

Условием положительной определенности матрицы P является положительная определенность ее главных блоков, так как определитель матрицы P равен $|P| = \varepsilon_1^2\varepsilon_2\left(|L_{33}^{0,0}||L_{11}^{0,0}||L_{22}^{0,0}| + O(\varepsilon_1) + O(\varepsilon_2)\right)$, т.е. $|L_{ii}^{0,0}| > 0, i = 1,2,3$. Погрешность такого вычисления $O(\varepsilon_1^l \varepsilon_2^{k+1-l}), l = \overline{0,k+1}$. Функция $\phi(x) = x'Px$ является функцией запаса системы (1).

Пример.

А) Рассмотрим систему, описываемую уравнениями $\varepsilon\ddot{x}_i + a_i\dot{x}_i + b_i x_i = \gamma_i u, z_i = x_i, i = \overline{1,n}$, где коэффициенты $a_i > 0,\ \gamma_i > 0, b_i, i = \overline{1,n}$, отличны от нуля, $a_i + b_i\sqrt{2} > \gamma_i$. Обозначим, $y_i = \dot{x}_i$, тогда система примет вид: $\dot{x}_i = y_i, \varepsilon\dot{y}_i = -a_i y_i - b_i x_i + \gamma_i u, z_i = x_i, i = \overline{1,n}$. Функция расхода для i-ой подсистемы $w_i(u, x_i) = x_i^2 + u^2, i = \overline{1,n}$. Пусть для системы выполняются условия 1–5. Функцию запаса будем искать в виде $\phi_i(x_i, y_i) = (x_i \quad y_i) P_i \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}$, $P_i = \begin{pmatrix} P_{1i} & P_{2i} \\ P_{2i} & P_{3i} \end{pmatrix}, i = \overline{1,n}$. Запишем необходимые и достаточные условия диссипативности i-ой подсистемы относительно функции расхода w_i:

$$2(x_i \quad y_i)\begin{pmatrix} P_{1i} & P_{2i} \\ P_{2i} & P_{3i} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_i \\ -\frac{b_i x_i + a_i y_i}{\varepsilon} \end{pmatrix} =$$

$$= x_i^2 - (x_i \quad y_i)\begin{pmatrix} f_{1i}^2 + f_{3i}^2 & f_{1i}f_{2i} + f_{3i}f_{4i} \\ f_{1i}f_{2i} + f_{3i}f_{4i} & f_{2i}^2 + f_{4i}^2 \end{pmatrix} \cdot$$

$$\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}; (x_i \quad y_i)\begin{pmatrix} P_{1i} & P_{2i} \\ P_{2i} & P_{3i} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\gamma_i}{\varepsilon} \end{pmatrix} = (x_i \quad y_i) \cdot$$

$$\begin{pmatrix} f_{1i} & f_{3i} \\ f_{2i} & f_{4i} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, R_i = (1/\sqrt{2} \quad 1/\sqrt{2}) \cdot$$

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = 1,$$

где

$$F_i = \begin{pmatrix} f_{1i} & f_{2i} \\ f_{3i} & f_{4i} \end{pmatrix}, W_i = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, i = \overline{1,n}.$$

Выполняя действия и умножая первое и второе уравнения на малый параметр ε, получим систему:

$$2\varepsilon P_{1i}x_i y_i - 2P_{2i}(b_i x_i^2 + a_i x_i y_i) + 2\varepsilon P_{2i} y_i^2$$
$$-2P_{3i}(b_i x_i y_i + a_i y_i^2) = \varepsilon x_i^2(1 - f_{1i}^2 - f_{3i}^2)$$
$$-2\varepsilon(f_{1i}f_{2i} + f_{3i}f_{4i})x_i y_i - \varepsilon(f_{2i}^2 + f_{4i}^2)y_i^2,$$
$$\gamma_i(P_{2i}x_i + P_{3i}y_i) = \frac{\varepsilon\sqrt{2}}{2}((f_{1i} + f_{3i})x_i + (f_{2i}$$

$+f_{4i})y_i)$. Приравнивая коэффициенты при неизвестных, получим систему уравнений

$$2\varepsilon P_{1i} - 2P_{2i}a_i - 2P_{3i}b_i = -2\varepsilon(f_{1i}f_{2i} + f_{3i}$$
$$\cdot f_{4i}), 2P_{2i}b_i = \varepsilon(f_{1i}^2 + f_{3i}^2 - 1), 2P_{3i}a_i - 2\varepsilon$$
$$\cdot P_{2i} = -\varepsilon(f_{2i}^2 + f_{4i}^2), P_{2i}\gamma_i = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}(f_{1i} + f_{3i}),$$

$P_{3i}\gamma_i = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}(f_{2i} + f_{4i}), i = \overline{1,n}.$ Функции P_{ji}, f_{li} представимы в виде асимптотических разложений по степеням малого параметра $P_{ji} = \sum_{k \geq 0} \varepsilon^k P_{ji}^k, f_{li} = \sum_{k \geq 0} \varepsilon^k f_{li}^k$, $j = \overline{1,3}, l = \overline{1,4}$; подставляя их в систему уравнений получим $P_{2i}^0 = 0, P_{3i}^0 = 0, P_{1i}^0 = \frac{\sqrt{2}((f_{1i}^0 + f_{3i}^0)a_i + (f_{2i}^0 + f_{4i}^0)b_i)}{2\gamma_i} - f_{1i}^0 f_{2i}^0 - f_{3i}^0 f_{4i}^0, P_{2i}^1$

$= \frac{\sqrt{2}(f_{1i}^0 + f_{3i}^0)}{2\gamma_i}, P_{3i}^1 = \frac{\sqrt{2}(f_{2i}^0 + f_{4i}^0)}{2\gamma_i}.$

Пусть $f_{1i}^0 = f_{3i}^0 = \frac{1}{2}, f_{2i}^0 = f_{4i}^0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Тогда, $P_{1i}^0 = \frac{a_i\sqrt{2}}{2\gamma_i} + \frac{b_i}{\gamma_i} - \frac{\sqrt{2}}{2} > 0, P_{2i}^1 = \frac{\sqrt{2}}{2\gamma_i}, P_{3i}^1 = \frac{1}{\gamma_i}$. Функция запаса для i-ой подсистемы имеет вид $\phi_i(x_i, y_i) = \frac{1}{2\gamma_i}[(a_i\sqrt{2} + 2b_i - \sqrt{2}\gamma_i + \cdots)x_i^2 + (2\sqrt{2}\varepsilon + \cdots)x_i y_i + (2\varepsilon + \cdots) y_i^2]$. Следовательно, i-ая подсистема диссипативна относительно функции расхода $w_i, i = \overline{1,n}$.

Б) Рассмотрим систему, описываемую уравнениями $\dot{x} = 2x + y + 3u, \varepsilon\dot{y} = x - y + 2u, z = x$. Функция расхода имеет вид $w(u,x) = 2x^2 + 6xu + u^2$. Пусть система удовлетворяет условиям 1–5. Функцию запаса будем искать в виде $\phi(x,y) = (x \quad y)P\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 \\ P_2 & P_3 \end{pmatrix}$. Запишем необходимые и достаточные условия диссипативности данной системы относительно функции расхода w:

$$2(x \quad y)\begin{pmatrix} P_1 & P_2 \\ P_2 & P_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2x + y \\ \frac{x-y}{\varepsilon} \end{pmatrix} =$$

$$= 2x^2 - (x \quad y)\begin{pmatrix} f_1^2 + f_3^2 & f_1 f_2 + f_3 f_4 \\ f_1 f_2 + f_3 f_4 & f_2^2 + f_4^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

$$(x \quad y)\begin{pmatrix} P_1 & P_2 \\ P_2 & P_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ \frac{2}{\varepsilon} \end{pmatrix} = 3x + (x \quad y)\cdot\begin{pmatrix} f_1 & f_3 \\ f_2 & f_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

$$R = (1/\sqrt{2} \quad 1/\sqrt{2})\cdot$$

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = 1, F_i = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 \\ f_3 & f_4 \end{pmatrix}, W_i = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Выполняя действия и умножая первое и второе уравнения на малый параметр ε, получим систему: $2\varepsilon P_1(2x^2 + xy) + 2P_2(x^2 - xy) + 2\varepsilon P_2(2xy + y^2) + 2P_3 \cdot (xy - y^2) = \varepsilon(2x^2 - (f_1^2 + f_3^2)x^2 - 2(f_1 \cdot f_2 + f_3 f_4)xy - (f_2^2 + f_4^2)y^2); 3\varepsilon P_1 x + 2P_2 \cdot x + 3\varepsilon P_2 y + 2P_3 y = \varepsilon(3x + \frac{\sqrt{2}(f_1+f_3)x}{2} + \frac{\sqrt{2}(f_2+f_4)y}{2})$. Приравнивая коэффициенты при неизвестных, получим систему уравнений $4\varepsilon P_1 + 2P_2 = \varepsilon(2 - f_1^2 - f_3^2), 2\varepsilon P_1 - 2P_2 + 4\varepsilon P_2 + 2P_3 = -2\varepsilon(f_1 f_2 + f_3 f_4), 2\varepsilon \cdot P_2 - 2P_3 = -\varepsilon(f_2^2 + f_4^2), 3\varepsilon P_1 + 2P_2 = \varepsilon \cdot \left(3 + \frac{f_1+f_3}{\sqrt{2}}\right), 3\varepsilon P_2 + 2P_3 = \frac{\varepsilon(f_2+f_4)}{\sqrt{2}}$. Функции P_i, f_j представимы в виде асимптотических разложений по степеням малого параметра $P_i = \sum_{k\geq 0}\varepsilon^k P_i^k, f_j = \sum_{k\geq 0}\varepsilon^k f_j^k$, $i = \overline{1,3}; j = \overline{1,4}$. Подставляя асимптотические разложения в систему уравнений и полагая, $f_1^0 = f_3^0 = \frac{1}{2}$, получаем $P_1^0 = 1, P_2^1 = -\frac{3}{2}, f_2^0 = f_4^0 = \frac{\sqrt{2}}{2}, P_3^1 = \frac{1}{2}$. Функция запаса $\phi(x,y) = x^2 - 3\varepsilon xy + \varepsilon\frac{y^2}{2} + O(\varepsilon^2)$. Следовательно, данная система диссипативна относительно функции расхода w.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе проведено исследование моделей систем, описываемых сингулярно возмущенными системами дифференциальных уравнений и изучено свойство диссипативности разнотемповых систем относительно функции расхода. Найдена функция запаса линейной разнотемповой системы. Приведен пример, иллюстрирующий полученные результаты.

Автор выражает глубокую признательность профессору В.А. Соболеву за полезные обсуждения и ценные советы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Willems J.C.* Dissipative dynamical systems. Part I: General theory // Arch. Rational Mechanics and Analysis. 1972. V. 45. P. 321–351.
2. *Willems J.C.* Dissipative dynamical systems. Part II: Linear systems with quadratic supply rates // Arch. Rational Mechanics and Analysis. 1972. V. 45. P. 352–393.
3. *Desoer C.A., Vidyasagar M.* Feedback systems: input-output properties. New York: Academic, 1975. 264 p.
4. *Hill D., Moylan P.* The stability of nonlinear dissipative systems // IEEE Transactions on Automatic Control. 1976. V. 21. P. 708–711.
5. *Hill D., Moylan P.* Dissipative dynamical systems: Basic input-output and state properties // J. Franklin Inst. 1980. V. 309. P. 327–357.
6. *Полушин И.Г.* Пассивность и пассификация нелинейных систем / И.Г. Полушин, А.Л. Фрадков, Д.Д. Хилл // Автоматика и телемеханика. – 2000. – № 3. – С. 3–37.
7. *Byrnes C.I., Isidory A., Willems J.C.* Passivity, feedback equivalence, and the global stabilization of minimum phase nonlinear systems // IEEE Transactions on Automatic Control. 1991. V. 36. № 11. P. 1228–1240.
8. *Семенова М.М.* Алгебраический критерий диссипативности сингулярно возмущенных систем / *М.М. Семенова* // Обозрение прикладной и промышленной математики. – 2001. Т.8. – Вып. 1. – С. 408 –409.
9. *Андерсон Б.* Устойчивость адаптивных систем: пер. с англ. / Андерсон Б., Битмид Р., Джонсон К. – М.: Мир. – 1989. – 263 с.

DISSIPABILITY OF LINEAR THREETEMPO SYSTEMS

Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics, Samara, Russia

A method of discovery of stock function is applied to study of threetempo linear systems. Dissipability of twoparameter linear systems is investigated. The application of the method is illustrated on example.

Keywords: linear threetempo systems, stock function, dissipative system relatively of expense function.

DOI: 10.37313/1990-5378-2022-24-2-58-63

REFERENCES

1. *Willems J.C.* Dissipative dynamical systems. Part I: General theory // Arch. Rational Mechanics and Analysis. 1972. V. 45. P. 321–351.
2. *Willems J.C.* Dissipative dynamical systems. Part II: Linear systems with quadratic supply rates // Arch. Rational Mechanics and Analysis. 1972. V. 45. P. 352–393.
3. *Desoer C.A., Vidyasagar M.* Feedback systems: input-output properties. New York: Academic, 1975. 264 p.
4. Hill D., Moylan P. The stability of nonlinear dissipative systems // IEEE Transactions on Au-tomatic Control. 1976. V. 21. P. 708–711.
5. *Hill D., Moylan P.* Dissipative dynamical systems: Basic input-output and state properties // J. Franklin Inst. 1980. V. 309. P. 327–357.
6. *Polushin I.G.* Passivnost’ i passifikaciya nelinejnyh sistem / I.G. Polushin, A.L. Fradkov, D.D. Hill // Avtomatika i telemekhanika. – 2000. – № 3. – S. 3–37.
7. *Byrnes C.I., Isidory A., Willems J.C.* Passivity, feedback equivalence, and the global stabilization of minimum phase nonlinear systems // IEEE Transactions on Automatic Control. 1991. V. 36. № 11. P. 1228–1240.
8. *Semenova M.M.* Algebraicheskij kriterij dissipativnosti singulyarno vozmushchennyh sistem / M.M. Semenova // Obozrenie prikladnoj i promyshlennoj matematiki. – 2001. T.8. – Vyp. 1. – S. 408 –409.
9. *Anderson B.* Ustojchivost’ adaptivnyh sistem: per. s angl. / Anderson B., Bitmid R., Dzhonson K. – M.: Mir. – 1989. – 263 s.

Marina Semenova, Candidate of Mathematics and Physics, Associate Professor at the Higher Mathematics Department. E-mail: semenova73@bk.ru