

УДК 539.376

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ О НЕОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ТОЛСТОСТЕННОЙ ТРУБЕ И ТРУБЕ С ЭЛЛИПТИЧЕСКИМ ВНЕШНИМ КОНТУРОМ ПРИ УСТАНОВИВШЕЙСЯ ПОЛЗУЧЕСТИ

© 2022 А.Д. Москалик, М.Ю. Александрова

Самарский государственный технический университет, Самара, Россия

Статья поступила в редакцию 26.06.2022

В данной статье приводится сравнительный анализ решений нелинейных краевых задач установившейся ползучести для неосесимметричной толстостенной трубы и для трубы с эллиптическим внешним контуром в первом приближении методом малого параметра. В статье формулируются две задачи для первого приближения метода малого параметра, результаты их решения рассмотрены на примере двух материалов с различными характеристиками нелинейности материала. Показано различие и сходство в результатах решения, которые приведены в таблице и представлены в виде графиков для сравнительного анализа.

Ключевые слова: установившаяся ползучесть, эллиптический внешний контур трубы, неосесимметричная толстостенная труба, метод малого параметра.

DOI: 10.37313/1990-5378-2022-24-3-42-46

Краевые задачи ползучести, вследствие физической нелинейности определяющих реологических соотношений представляют трудноразрешимую проблему как для задач, учитывающих возмущения реологических свойств материала (внутренние краевые задачи), так и при решении задач с возмущенными геометрическими характеристиками исследуемого объекта (внешними краевыми задачами). Применение метода малого параметра к задачам упругопластического деформирования подробно рассматривается в монографии Д.Д. Ивлева, Л.В. Ершова [1]. Достаточно много работ посвящено исследованию внутренних краевых задач методом малого параметра. Вопрос определения напряженно-деформированного состояния толстостенной трубы при различных видах нагружения, свойствах материала, степени поврежденности, учета эффекта упрочнения и т. д. рассматривается в монографии Ю.Н. Работнова [2], статье В.П. Радченко и Е.В. Башкиновой [3], J. Jelwan [4], L.H. You [5] и многих других авторов.

Один из основных подходов к решению задач ползучести с возмущенными граничными условиями состоит в линеаризации граничных условий и реологических соотношений методом малого параметра. Во внешних краевых задачах установившейся ползучести этот метод используется Радченко В.П. и Москалик А.Д. в ра-

ботах [6, 7] для приближённого аналитического решения задачи об установившейся ползучести толстостенной несоосной трубы, находящейся под внутренним давлением. В работе [8] построено приближенное решение задачи для трубы с эллиптическим внешним контуром методом малого параметра с учетом первого и второго приближений. Однако в указанных работах не рассматривается сравнительный анализ решений отдельных краевых задач с целью определения общих подходов к их решению, а также различий.

Целью данной работы является определение влияния величины малого параметра δ , при решении 2х задач установившейся ползучести для толстостенной трубы с учетом первого приближения метода малого параметра, на значения напряжений в опасных сечениях трубы, находящейся под внутренним давлением q в условиях плоского деформированного состояния. Для сравнения выбраны решения для двух труб: неосесимметричная труба, для которой малым параметром является смещение центра внешнего контура относительно центра внутреннего контура: $\delta = (b - a)/a$, где a и b – внутренний и внешний радиусы соответственно (рис. 1а); и труба с эллиптическим внешним контуром, для которой малым параметром является величина сжатия эллипса $\delta = (a - b)/a = 1 - \sqrt{1 - e^2}$, где $e = \sqrt{1 - b^2/a^2}$ – эксцентриситет, a , b – большая и малая полуоси внешнего контура эллипса (рис. 1б).

Для решения задач разложение тензора напряжений σ_{ij} , тензора скоростей деформаций ползучести $\dot{\epsilon}_{ij}$ и вектора скоростей перемещений \dot{u}_i по малому параметру с учетом членов

Москалик Анна Давидовна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Механика».

E-mail: annatoskalik@yandex.ru

Александрова Маргарита Юрьевна, кандидат технических наук, доцент кафедры «Механика».

E-mail: kris-maks@mail.ru

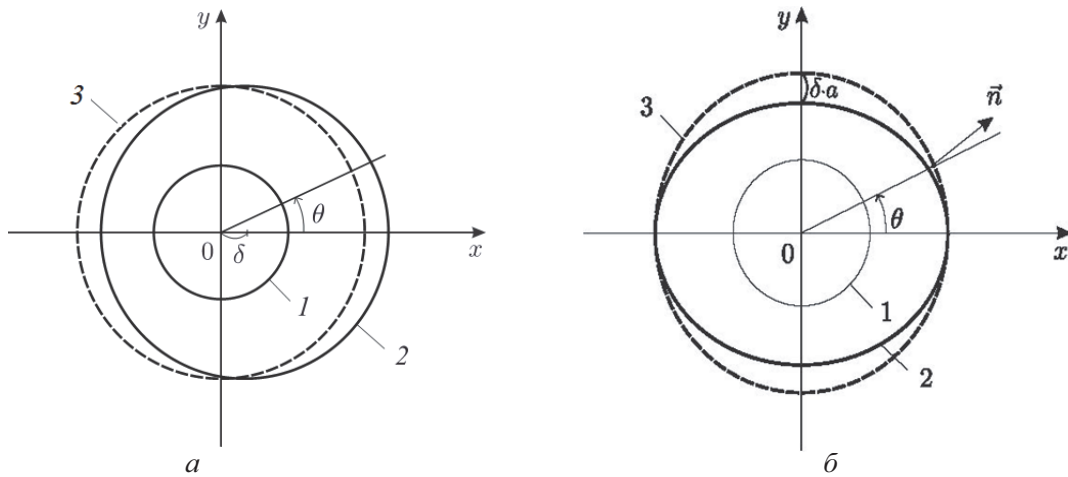


Рис. 1. Схема трубы с возмущенной внешней границей:
 а – неосесимметричная труба; б – труба с эллиптическим внешним контуром;
 1 – внутренний контур трубы; 2 – внешний контур трубы;
 3 – внешний контур трубы для осесимметричного случая

первого порядка включительно имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \sigma_{ij}^{(0)} + \delta \sigma_{ij}^{(1)} + o(\delta^2), \\ \dot{\epsilon}_{ij} &= \dot{\epsilon}_{ij}^{(0)} + \delta \dot{\epsilon}_{ij}^{(1)} + o(\delta^2), \\ \dot{u}_i &= \dot{u}_i^{(0)} + \delta \dot{u}_i^{(1)} + o(\delta^2), \end{aligned} \quad (1)$$

где индексы 0, 1 соответствуют нулевому и первому приближениям.

Предполагается, что упругие деформации малы по сравнению с деформациями ползучести и ими можно пренебречь. С физической точки зрения это означает, что рассматриваются установившиеся поля скоростей деформаций ползучести и напряжений. В решении указанных двух задач используется гипотеза несжимаемости материала для скоростей деформаций ползучести на установившейся стадии при условии плоского деформированного состояния ($\dot{\epsilon}_{zz} = 0$):

$$\dot{\epsilon}_{rr} + \dot{\epsilon}_{\theta\theta} = 0. \quad (2)$$

Постановка задачи для каждого приближения метода малого параметра включает в себя уравнения равновесия

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}^{(1)}}{\partial r} &= -\frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(1)}}{\partial \theta} - \frac{\sigma_{rr}^{(1)} - \sigma_{\theta\theta}^{(1)}}{r}, \\ \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}^{(1)}}{\partial \theta} &= -r \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(1)}}{\partial r} - 2\sigma_{r\theta}^{(1)}; \end{aligned} \quad (3)$$

также для каждого приближения выполняются соотношения Коши

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{rr} &= \frac{\partial \dot{u}_r}{\partial r}, \quad \dot{\epsilon}_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{u}_\theta}{\partial \theta} + \frac{\dot{u}_r}{r}, \\ \dot{\epsilon}_{r\theta} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \dot{u}_r}{\partial \theta} + \frac{\partial \dot{u}_\theta}{\partial r} - \frac{\dot{u}_\theta}{r} \right). \end{aligned} \quad (4)$$

В качестве определяющих используются соотношения теории установившейся ползучести со степенным законом

$$\epsilon_{ij} = \frac{3}{2} A \sigma_e^{n-1} S_{ij}, \quad (5)$$

где n, A – постоянные характеристики материала, $S_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij}$ – девиатор напряжений, σ_e – интенсивность напряжений для случая плоской деформации

$$\sigma_e = \frac{\sqrt{3}}{2} [(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})^2 + 4\sigma_{r\theta}^2]^{1/2}. \quad (6)$$

В Таблице 1 приведены разложения внешнего возмущенного контура трубы для двух краевых задач с учетом первого приближения. Ввиду наличия осей симметрии для трубы с эллиптическим контуром, в разложении по малому параметру присутствуют члены разложения только чётной степени угла θ .

Исходя из уравнений (2-5) с учетом разложения (1) можно сформулировать краевую задачу для первого приближения, при этом граничные условия для двух задач будут различаться только для возмущенного внешнего контура трубы, на внутреннем, невозмущенном контуре граничные условия одинаковы: $\sigma_{rr}^{(1)}, \sigma_{r\theta}^{(1)}$ равны нулю.

Анализ результатов решений обеих задач показан на модельном примере трубы с внутренним радиусом 0,115 м, внешним радиусом 0,15 м, находящейся под действием внутреннего давления $q = 22,07$ МПа, из двух материалов с характеристиками нелинейности материала:

углеродистая сталь $n = 3,03, A = 9,04 \cdot 10^{-9}$ МПа $^{-n}$ ч $^{-1}$;
 жаропрочный сплав ЭИ698 $n = 10,96, A = 4,57 \cdot 10^{-33}$ МПа $^{-n}$ ч $^{-1}$.

Рассмотрен анализ решения для опасных сечений двух труб на внешнем, возмущенном контуре. В таблице 2 приведены значения тангенциальных напряжений $\sigma_{\theta\theta}^* = \sigma_{\theta\theta}^{(0+1)} / \sigma_{\theta\theta}^{(0)}$ с учетом первого приближения на внешней границе при $\theta = \pi$, где $\tilde{r} = r/a$ для неосесимметричной трубы, и при $\theta = \pi/2$, где $\tilde{r} = r/h$ для трубы с эллиптическим контуром.

Таблица 1. Разложения внешнего возмущенного контура трубы для двух краевых задач с учетом первого приближения

Несоосная труба	Труба с эллиптическим внешним контуром
Уравнение внешнего контура трубы с учетом возмущения δ в полярных координатах	
$(r \cos \theta - \delta)^2 + r^2 \sin^2 \theta = b^2$	$r = h/\sqrt{1 - e^2 \cos^2 \theta} = a(1 - \delta)/\sqrt{1 + (\delta^2 - 2\delta) \cos^2 \theta}$, где h – внутренний радиус трубы, полюсом является центр эллипса
Разложение уравнения внешнего контура в степенной ряд по параметру δ , ограничиваясь первым приближением малого параметра	
$r = b + \delta \cos \theta$	$r = a + \frac{a}{2} (\cos 2\theta - 1)\delta$

Таблица 2. Значения тангенциальных напряжений $\sigma_{\theta\theta}^* = \sigma_{\theta\theta}^{(0+1)} / \sigma_{\theta\theta}^{(0)}$

$\delta, \%$	0	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0
Углеродистая сталь											
Неосесимметричная труба, $\sigma_{\theta\theta}^*$	1,00	1,04	1,09	1,13	1,17	1,21	1,25	1,29	1,32	1,37	1,40
Эллиптическая труба, $\sigma_{\theta\theta}^*$	1,00	1,06	1,12	1,18	1,24	1,30	1,35	1,41	1,46	1,51	1,56
Жаропрочный сплав ЭИ698											
Неосесимметричная труба, $\sigma_{\theta\theta}^*$	1,00	1,04	1,09	1,13	1,17	1,22	1,26	1,30	1,34	1,38	1,42
Эллиптическая труба, $\sigma_{\theta\theta}^*$	1,00	1,06	1,12	1,18	1,24	1,30	1,36	1,42	1,48	1,54	1,60

Графическое представление анализа решений задач о неосесимметричной трубе и трубе с эллиптическим внешним контуром изображено на рис. 2.

Из данных, приведенных в таблице 2 и графиков рисунка 2, следует, что при возрастании смещения центра внешнего контура до 10% в неосесимметричной трубе тангенциальные напряжения в опасном сечении при $\theta = \pi$ возрастают в 1,4 раза для трубы из углеродистой стали, и в 1,42 раза для трубы из сплава ЭИ698. Для толстостенной трубы с эллиптическим внешним контуром при возрастании величины сжатия эллипса до 10% внешнего радиуса трубы, тангенциальные напряжения в опасном сечении при $\theta = \pi/2$ возрастают в 1,56 раз для трубы из углеродистой стали и в 1,6 раз для трубы из сплава ЭИ698 по сравнению с решением нулевого приближения задачи (осесимметричный случай). Расхождение значений $\sigma_{\theta\theta}^*$ возникает при величине малого параметра $\delta=5\%$ и не превышает 0,04 при $\delta=10\%$. Можно сделать вывод о том, что при учете первого приближения ме-

тода малого параметра для задачи с возмущенной внешней границе показатели нелинейности материала оказывают небольшое влияние на пропорциональное увеличение опасных тангенциальных напряжений в отношении к тангенциальным напряжениям нулевого приближения, что требует подтверждения дальнейшими исследованиями. Более существенно выражено влияние вида возмущения внешней границы трубы: несоосность трубы или эллиптичность внешнего контура. В этом случае различия в значениях тангенциальных напряжений достигают 0,18 от $\sigma_{\theta\theta}^*$.

Сравнительный анализ результатов решения указанных выше задач показывает, что в первом приближении при возрастании величины сжатия эллипса до 10% внешнего радиуса толстостенной трубы с эллиптическим внешним контуром тангенциальные напряжения в опасном сечении возрастают в 1,1 раза больше по сравнению с аналогичным смещением центра внешнего контура несоосной толстостенной трубы.

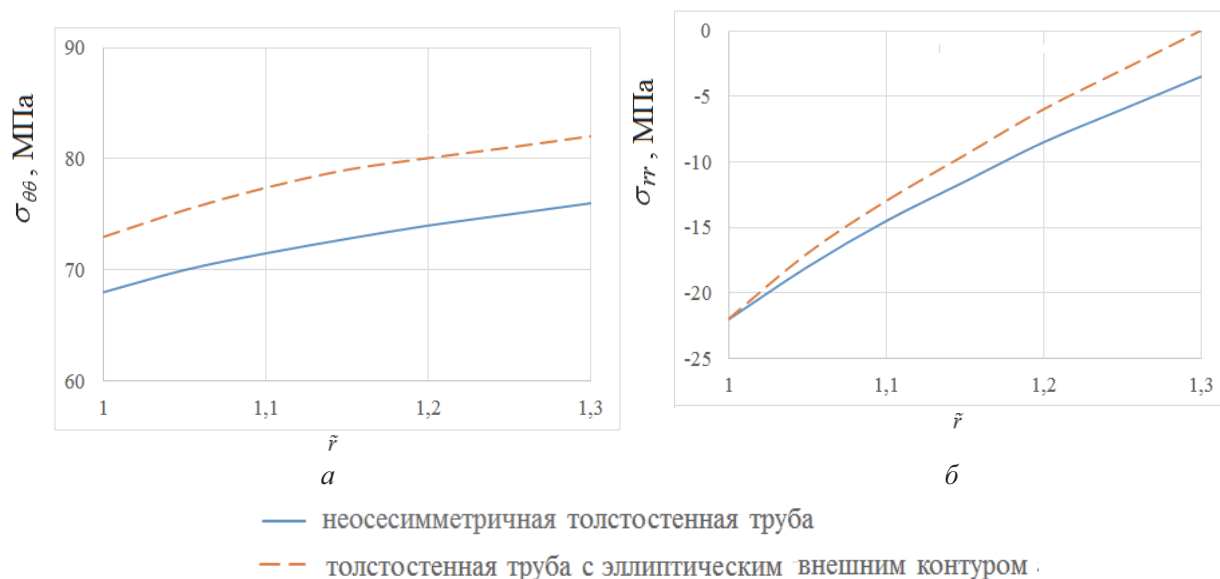


Рис. 2. Графическое представление анализа результата решения на модельном примере трубы с внутренним радиусом 0,115 м, внешним радиусом 0,15 м из углеродистой стали под действием внутреннего давления $q = 22,07$ МПа в опасном сечении:
 а – зависимость тангенциального напряжения от приведенного радиуса \tilde{r} ;
 б – зависимость радиального напряжения от приведенного радиуса \tilde{r}

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ивлев, Д.Д. Метод возмущений в теории упруго-пластического тела / Д.Д. Ивлев, Л.В. Ершов. - М.: Наука, 1978. - 208 с.
2. Работнов, Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела [Текст] / Ю. Н. Работнов. - Москва : Наука, 1979. - 744 с.
3. Радченко, В. П. Решение краевых задач установившейся ползучести в полярных координатах методом возмущений [Текст] / В. П. Радченко, Е. В. Башкинова // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Техн. науки. - 1998. - № 5. - С. 86-91.
4. Jelwan, J. Creep life design criterion and its applications to pressure vessel codes [Text] / J. Jelwan, M. Chowdhury, G. Pearce // Material Physics and Mechanics. - 2011. no. 11. P. 157-182.
5. You, L.H. Creep deformations and stresses in thick-walled cylindrical vessels of functionally graded materials subjected to internal pressure [Text] / L. H. You, H. Ou, Z. Y. Zheng // Composite Structures. - 2007. Vol. 78. P. 285-291.
6. Москалик А.Д. Применение метода возмущений к задаче о несоосной трубе в условиях установившейся ползучести / А.Д. Москалик // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. - 2013. - № 4 (33). - С. 76-85.
7. Радченко, В.П. Аналитическое решение краевой задачи установившейся ползучести неосесимметричной толстостенной трубы / В.П. Радченко, А.Д. Москалик // Прикладная математика и механика. - 2019. - Т. 83. - Вып. 1. - С. 144-157.
8. Радченко, В.П. Приближенное аналитическое решение задачи для трубы с эллиптическим внешним контуром в условиях установившейся ползучести / В.П. Радченко, А.Д. Москалик // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. - 2014. - № 3(36). - С. 39-49.

COMPARATIVE ANALYSIS OF SOLUTIONS FOR A NONAXISYMMETRIC THICK-WALLED TUBE AND A TUBE WITH AN ELLIPTICAL OUTER CONTOUR UNDER STEADY-STATE CREEP CONDITIONS

© 2022 A.D. Moskalik, M.Y. Alexandrova

Samara State Technical University, Samara, Russia

This article presents a comparative analysis of the solutions of nonlinear boundary value problems of steady-state creep for a nonaxisymmetric thick-walled tube and for a tube with an elliptical outer contour in the first approximation by the small parameter method. Two problems for the first approximation of the small parameter method are formulated in the article and the results of their solution are considered on the example of two materials with different material nonlinearity characteristics. The differences and similarities in the solution results are shown, which are given in the table and presented in the form of graphs for comparative analysis.

Key words: steady-state creep, elliptical outer contour of the tube, nonaxisymmetric thick-walled tube, small parameter method.

DOI: 10.37313/1990-5378-2022-24-3-42-46

REFERENCES

1. *Ivlev, D.D.* Metod vozmushchenij v teorii uprugoplasticheskogo tela / D.D. Ivlev, L.V. Ershov. - M.: Nauka, 1978. - 208 s.
2. *Rabotnov, Yu.N.* Mekhanika deformiruемого твердого tela [Tekst] / Yu. N. Rabotnov. - Moskva : Nauka, 1979. - 744 s.
3. *Radchenko, V.P.* Reshenie kraevyh zadach ustanovivshejsya polzuchesti v polyarnyh koordinatah metodom vozmushchenij [Tekst] / V. P. Radchenko, E. V. Bashkinova // Vestn. Sam. gos. tekhn. un-ta. Ser. Tekhn. nauki. - 1998. - № 5. - S. 86-91.
4. *Jelwan, J.* Creep life design criterion and its applications to pressure vessel codes [Text] / J. Jelwan, M. Chowdhury, G. Pearce // Material Physics and Mechanics. - 2011. no. 11. P. 157-182.
5. *You, L.H.* Creep deformations and stresses in thick-walled cylindrical vessels of functionally graded materials subjected to internal pressure [Text] / L. H. You, H. Ou, Z. Y. Zheng // Composite Structures. - 2007. - Vol. 78. - P. 285-291.
6. *Moskalik A.D.* Primenenie metoda vozmushchenij k zadache o nesoosnoj trube v usloviyah ustanovivshejsya polzuchesti / A.D. Moskalik // Vestn. Sam. gos. tekhn. un-ta. Ser. Fiz.-mat. nauki. - 2013. - № 4 (33). - S. 76-85.
7. *Radchenko, V.P.* Analiticheskoy reshenie kraevoy zadachi ustanovivshejsya polzuchesti neosesimmetrichnoj tolstostennoj trubyy / V.P. Radchenko, A.D. Moskalik // Prikladnaya matematika i mekhanika. - 2019. - T. 83. - Vyp. 1. - S. 144-157.
8. *Radchenko, V.P.* Priblizhennoe analiticheskoe reshenie zadachi dlya trubyy s ellipticheskim vneshnim konturom v usloviyah ustanovivshejsya polzuchesti / V.P. Radchenko, A.D. Moskalik // Vestn. Sam. gos. tekhn. un-ta. Ser. Fiz.-mat. nauki. - 2014. - № 3 (36). - S. 39-49.

*Anna Moskalik, Candidate of Physics and Mathematics,
Associate Professor at the Mechanics Department.*

E-mail: annamoskalik@yandex.ru

*Margarita Alexandrova, Candidate of Technics, Associate
Professor at the Mechanics Department.*

E-mail: kris-maks@mail.ru