УДК 517.997

МЕТОД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ, ОСНОВАННЫЙ НА ЛОКАЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИИ МНОЖЕСТВА ДОСТИЖИМОСТИ, ДЛЯ ДИСКРЕТНЫХ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Иркутский государственный университет путей сообщения, г. Иркутск, Россия

Статья поступила в редакцию 15.12.2022

Рассматривается алгоритм улучшения, основанный на локальных аппроксимациях множества достижимости дискретной по времени задачи оптимального управления. Получены условия, обеспечивающее релаксационность алгоритма и связь с необходимыми условиями оптимальности.

Ключевые слова: оптимальное управление, метод последовательных приближений, локальная аппроксимация множества достижимости, дискретные задачи.

DOI: 10.37313/1990-5378-2023-25-3-114-129

EDN: LKFKBB

ВВЕДЕНИЕ

Задачи оптимального управления динамическими процессами имеют очень широкий спектр приложений. Хотя приближенные методы их решения насчитывают более 50 лет и накоплен большой потенциал алгоритмов, нельзя с уверенностью утверждать, что один из разработанных ранее методов обеспечит успех в решении той или иной задачи. Новые подходы построения приближенных методов позволяют дополнить серию уже имеющихся алгоритмов, что расширяет возможности нахождения приближенно-оптимального управления в конкретной прикладной задаче. Всякий численный метод решения дифференциальных уравнений представляет собой рекуррентную цепочку, являющуюся дискретной системой, поэтому одним из подходов состоит в том, чтобы исходную непрерывную задачу заменить ее дискретной аппроксимацией — и для последней разрабатывать приближенные методы решения.

Качественная теория дискретных систем изложена в монографиях [1-4]. Известно много методов исследования динамики дискретных систем [5-11], в частности, в работах [10,11] развиваются алгоритмы улучшения второго порядка для дискретной и непрерывной задачи оптимального управления на случай, когда управляемая система имеет сетевую структуру. Использование разложения конструкций метода улучшения второго порядка по параметру для дискретных задач оптимального управления было проведено в работе [12,13].

Методики построения множеств достижимости разработаны в работах [20-23]. В ос-нове рассматриваемого метода лежит теорема [17] о том, что множество достижимости системы есть множество нулей функции, являющейся решением уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана со специальным начальным условием. Аппроксимация такого уравнения рассматривается для некоторой вспомогательной задачи, получающейся из исходной путем расширения фазового пространства. В трудах [6,18] впервые была высказана идея об использовании приближенного описания множества достижимости для построения алгоритма улучшения в непрерывных системах, а более глубокое исследование такого метода было проведено в работе [14,15]. Идея применения этого подхода и общая итеративная схема улучшения для дискретных систем изложена в статье [19].

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается дискретная по времени управляемая система

$$x(t+1) = f(t, x(t), u(t)),\ t \in T = \{t_0, t_0+1, \dots, t_1\}, \quad (1.1)$$

$$x(t_0) = x_0,\ u(t) \in U(t),\ t \in T. \quad (1.2)$$

где $x(t)$ принимает значения в евклидовом

Батурин Владимир Александрович, доктор физ.-мат. наук, профессор, старший научный сотрудник. E-mail: rozen@iss.ru
Данеев Алексей Васильевич, доктор технических наук, профессор, профессор кафедры «Информационные системы и защита информации». E-mail: daneev@mail.ru
Сизых Виктор Николаевич, доктор технических наук, профессор, профессор кафедры «Автоматизация производственных процессов». E-mail: sizykh_vn@mail.ru

пространстве $\mathbb{R}^n$, $U(t) \subseteq \mathbb{R}^r$. Функция $x(t)$ называется траекторией, а функция $u(t)$ — управлением. Известно, что динамическая система (1.1)-(1.2) может быть равносильно записана как:

$$x(t+1) \in f(t, x(t), U(t)), \quad t \in T, \quad x(t_0) = x_0, \qquad (1.3)$$

где $f(t,x(t),U(t))$ — множество допустимых переходов системы на шаге t.

Определение 1. Совокупность пар функций $(x(t),u(t))$, удовлетворяющих условиям (1.1)-(1.2) назовем множеством D допустимых управляемых процессов.

Требуется минимизировать терминальный функционал

$$I(x,u) = F(x(t_1)). \qquad (1.4)$$

на множестве D.

Пусть задан некоторый элемент $(x^I(t),\ u^I(t)) \in D$. Под задачей улучшения будем понимать задачу нахождения такого процесса $(x^{II}(t),\ u^{II}(t)) \in D,$ что $I(x^{II}, u^{II}) < I(x^I, u^I)$.

Определение 2. Множеством достижимости $\aleph_{\mathcal{R}}(t_0,x_0;\tau)$ системы (1.1)-(1.2) на шаге τ, порожденное точкой x_0 в момент t_0 будем называть множество тех и только тех элементов $z \in \mathbb{R}^n$, для каждого из которых найдется решение $x(t)$ системы (1.1)-(1.2) (включения (1.3)) такое, что $x(\tau)=z$.

Описание множества достижимости управляемой системы является основной характеристикой, используя которую можно исследовать свойства системы. Если известно множество достижимости, то решение задачи сводится к минимизации функции конечного состояния $F(x)$ на этом множестве в момент времени t_1.

В монографии [17] доказана следующая теорема о множестве достижимости для дискретных систем:

Теорема 1. Пусть $f(t,x(t),\ U(t)) \neq \varnothing$ при всех $(t,x) \in T \times \mathbb{R}^n$, и существуют функции φ: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ и неотрицательная ψ: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ такие, что

1) $\psi(x)=0$ тогда и только тогда, когда $x = x_0$;

2) $$W_\varphi(t,x) = \left\{ \omega \in f(t, x(t)) : \varphi(t+1, \omega) = \sup_{\upsilon \in f(t,x(t),U(t))} \varphi(t+1, \upsilon) \right\} \neq \otimes$$

при всех $(t, x) \in T \times \mathbb{R}^n$;

3) при всех $(t, x) \in T \times \mathbb{R}^n$

$$\sup_{u \in U(t)} \varphi(t+1, f(t,x,u)) = \varphi(t,x), \quad \varphi(t_0, x) = \psi(x). \qquad (1.5)$$

Тогда $\aleph_{\mathcal{R}}(t_0, x_0; \tau)=\{x \in \mathbb{R}^n: \varphi(\tau,x)=0\}$ при всех $\tau \in T$.

По сути дела в теореме 1 рассмотрена следующая задача оптимального управления:

$$x(t+1)=f(t,x(t),u(t)),\ x(t_1) = x_1,\ u(t) \in U(t),\ t \in T,$$
$$J=\psi(x(t_0)) \to \min.$$

Если точка x_1 принадлежит множеству достижимости $\aleph_{\mathcal{R}}(t_0,x_0;\ t_1)$, то $\psi(x(t_0))=0$, а если не принадлежит, то $\psi(x(t_0))>0$ на оптимальном решении, соответственно и функция Беллмана имеет те же свойства. Имеем

$$\varphi(\tau, x^*) > 0, \qquad x^* \notin \aleph_{\mathcal{R}}(t_0, x_0; \tau),$$
$$\varphi(\tau, x^*) = 0, \qquad x^* \in \aleph_{\mathcal{R}}(t_0, x_0; \tau), \qquad \tau \in T.$$

Если $x^I(\tau)$ лежит во множестве достижимости системы $\aleph_{\mathcal{R}}(t_0,x_0;\ \tau)$ на каждом шаге $\tau \in T$, то функция Беллмана равна нулю, и ее линейно-квадратичная нулевая аппроксимация не дает возможности нахождения приближенного представления множества $\aleph_{\mathcal{R}}$.

Предполагая, что решение уравнения (1.5) существует, получаем, что всякое решение включения

$$x(t+1) \in W_\varphi(t,x), \quad t \in T, \quad x(t_1)=x^*,$$

где x^* - точка минимума функции $F(x)$ при условии $x \in \aleph_{\mathcal{R}}(t_0, x_0; \tau)$, является решением задачи оптимального управления (1.1)-(1.2), (1.4). Решение уравнения Беллмана (1.5) достаточно затруднительно и мы будем исходить из аппроксимации самого уравнения и функции Беллмана до второго порядка.

При выводе конструкций алгоритма предполагается, что F: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ - дважды непрерывно дифференцируема, f: $T \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}$ - дважды непрерывно дифференцируема по (x,u), $U(t)= \mathbb{R}^r$, $t \in T$.

2. КОНСТРУКЦИЯ БАЗОВОГО АЛГОРИТМА

Будем искать локально улучшенный элемент $(x^{II}(t), u^{II}(t)) \in D$ вблизи некоторого заданного начального элемента $(x^{I}(t),\ u^{I}(t)) \in D$. Это дает возможность заменить границу множества достижимости ее квадратической аппроксимацией и построить на этой основе алгоритм улучшения.

Введем дополнительную скалярную функцию $x^0(t)$ для системы (1.1):

$$x^0(t+1) = x^0(t) + \frac{1}{2}\left(g\Delta u'\Delta u + (1-g)\Delta x'\Delta x\right),$$

$$\Delta u = u - u^I(t), \qquad \Delta x = x - x^I(t),$$

$$x^0(t_0) = 0, \quad 0 \le g \le 1, \quad t \in T,$$

где «’» означает операцию транспонирования. Определим функции

$$y(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x^0(t) \end{pmatrix}, \qquad y_0(t) = \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \end{pmatrix},$$
$$\tilde{f}(t,y,u) = \left(x^0(t) + \frac{1}{2}\left(g\Delta u'\Delta u + (1-g)\Delta x'\Delta x\right) \right) \tag{2.1}$$

и получим систему вида

$$y(t+1) = \tilde{f}(t, y(t), u(t)), \quad y(t_0) = y_0, \quad t \in T = \{t_0, t_0+1, \ldots, t_1\}. \tag{2.2}$$

Уравнение Беллмана (1.5) для системы (2.2) будет выглядеть следующим образом

$$\max_u \varphi\left(t+1, \tilde{f}(t,y,u)\right) - \varphi(t,y) = 0, \tag{2.3}$$

в предположении, что максимум $\varphi\left(t+1, \tilde{f}(t,y,u)\right)$ достигается в некоторой точке $\bar{u}(t,y)$. Найдем приближенное решение с помощью тейлоровской аппроксимации (2.3) в окрестности траектории $y_\varepsilon^I = \begin{pmatrix} x^I(t) \\ -\varepsilon \end{pmatrix}$, $\varepsilon > 0$, которая лежит вне множества достижимости (2.2), а значит функция Беллмана не равна нулю. Для этого введем вспомогательную функцию

$$R(t,y,u) = \varphi\left(t+1, \tilde{f}(t,y,u)\right) - \varphi(t,y) \tag{2.5}$$

и рассмотрим ее разложение в ряд Тейлора до слагаемых второго порядка включительно в окрестности точки $\left(y_\varepsilon^I(t), u^I(t)\right)$:

$$R(t,y,u) = R\left(t, y_\varepsilon^I(t), u^I(t)\right) + R_u'\left(t, y_\varepsilon^I(t), u^I(t)\right)\Delta u + R_u'\left(t, y_\varepsilon^I(t), u^I(t)\right)\Delta y +$$
$$+ \frac{1}{2}\Big(\Delta u' R_{uu}\left(t, y_\varepsilon^I(t), u^I(t)\right)\Delta u + \Delta y' R_{yy}\left(t, y_\varepsilon^I(t), u^I(t)\right)\Delta y + \Delta y' R_{yu}\left(t, y_\varepsilon^I(t), u^I(t)\right)\Delta u +$$
$$+ \Delta u' R_{uy}\left(t, y_\varepsilon^I(t), u^I(t)\right)\Delta y \ \Big) + o\left(|\Delta u|^2, |\Delta y|^2\right). \tag{2.6}$$

Согласно соотношениям (2.3) и (2.5) $\max_u R(t,y,u) = 0$. Будем исследовать на максимум по u линейно-квадратическое приближение функции $R(t,y,u)$. Тогда из условия стационарности имеем

$$R_u\left(t, y_\varepsilon^I(t), u^I(t)\right) + R_{uu}\left(t, y_\varepsilon^I(t), u^I(t)\right)\Delta u + R_{uy}\left(t, y_\varepsilon^I(t), u^I(t)\right)\Delta y = 0,$$

откуда

$$\tilde{u}(t,y) = u^I(t) - R_{uu}^{-1}\left(t, y_\varepsilon^I(t), u^I(t)\right)R_u\left(t, y_\varepsilon^I(t), u^I(t)\right) + R_{uy}\left(t, y_\varepsilon^I(t), u^I(t)\right)\left(y - y_\varepsilon^I(t)\right) \tag{2.7}$$

в предположении отрицательной определенности $R_{uu}\left(t, y_\varepsilon^I(t), u^I(t)\right)$.

Подставляя выражение (2.7) в (2.6), и приравнивая к нулю коэффициенты при Δy и $(\Delta y)^2$, а также свободный член, получим

$$\begin{aligned}&R\left(t, y_\varepsilon^I(t), u^I(t)\right)-\frac{1}{2} R_u^{'}\left(t, y_\varepsilon^I(t), u^I(t)\right) R_{uu}^{-1}\left(t, y_\varepsilon^I(t), u^I(t)\right) R_u\left(t, y_\varepsilon^I(t), u^I(t)\right)=0,\\ &R_y\left(t, y_\varepsilon^I(t), u^I(t)\right)-R_{yu}\left(t, y_\varepsilon^I(t), u^I(t)\right) R_{uu}^{-1}\left(t, y_\varepsilon^I(t), u^I(t)\right) R_u\left(t, y_\varepsilon^I(t), u^I(t)\right)=0,\\ &R_{yy}\left(t, y_\varepsilon^I(t), u^I(t)\right)-R_{uy}\left(t, y_\varepsilon^I(t), u^I(t)\right) R_{uu}^{-1}\left(t, y_\varepsilon^I(t), u^I(t)\right) R_{uy}\left(t, y_\varepsilon^I(t), u^I(t)\right)=0.\end{aligned} \quad (2.8)$$

Будем искать приближение функции Беллмана в линейно-квадратическом виде

$$\varphi(t, y)=\upsilon(t)+\kappa'(t)\left(y-y_\varepsilon^I(t)\right)+\frac{1}{2}\left(y-y_\varepsilon^I(t)\right)' \chi(t)\left(y-y_\varepsilon^I(t)\right), \quad (2.9)$$

где $v(t)$ — скалярная, $n(t)$ — векторная размерности $(n+1)$, а $x(t)$ - матричная размерности $(n+1) \times (n+1)$ функции.

Используя определения функции R (2.5) и функции φ (2.9), запишем

$$\begin{aligned}R(t, y, u)=\ &\upsilon(t+1)+\kappa'(t+1)\left(y-y_\varepsilon^I(t+1)\right)+\\ &+\frac{1}{2}\left(y-y_\varepsilon^I(t+1)\right)' \chi(t+1)\left(y-y_\varepsilon^I(t+1)\right)-\\ &-\upsilon(t)-\kappa'(t)\left(y-y_\varepsilon^I(t)\right)-\frac{1}{2}\left(y-y_\varepsilon^I(t)\right)' \chi(t)\left(y-y_\varepsilon^I(t)\right).\end{aligned} \quad (2.10)$$

Находя производные функции R из выражения (2.10) и подставляя их в равенства (2.8), имеем

$$\begin{aligned}&\upsilon(t+1)-\frac{1}{2} \kappa'(t+1) \tilde{f}_u\left(\tilde{f}_u^{'} \chi(t+1) \tilde{f}_u+H_{uu}\right)^{-1} \tilde{f}_u^{'} \kappa(t+1)=\upsilon(t),\\ &\tilde{f}_y^{'} \kappa(t+1)-\left(\tilde{f}_y^{'} \chi(t+1) \tilde{f}_u+H_{uu}\right)\left(\tilde{f}_u^{'} \chi(t+1) \tilde{f}_u+H_{uu}\right)^{-1} \tilde{f}_u^{'} \kappa(t+1)=\kappa(t),\\ &\tilde{f}_y^{'} \chi(t+1) f_y+H_{yy}-\left(\tilde{f}_y^{'} \chi(t+1) \tilde{f}_u+H_{yu}\right)\left(\tilde{f}_u^{'} \chi(t+1) \tilde{f}_u+H_{uu}\right)^{-1} \times\\ &\times \tilde{f}_u^{'} \chi(t+1) \tilde{f}_u+H_{uy}=\chi(t),\end{aligned} \quad (2.11)$$

где производные функции $\tilde{f}(t, y, u)$, определенной равенством (2.1), вычисляются в точке $\left(t, y_\varepsilon^I(t), u^I(t)\right)$, а производные функции $H(t, y, \kappa;\ u) = \kappa'(t+1) \tilde{f}(t, y, u)$ - в точке $\left(t, y_\varepsilon^I(t), \kappa(t+1), u^I(t)\right)$.

Исследуем начальное условие (2.4). Представим его правую часть в приближенном виде

$$\begin{aligned}\left\|y-y_0\right\|=\ &\left\|y_\varepsilon^I(t)-y_0\right\|+\left(\frac{y_\varepsilon^I\left(t_0\right)-y_0}{\left\|y_\varepsilon^I\left(t_0\right)-y_0\right\|}\right)'\left(y-y_\varepsilon^I\left(t_0\right)\right)+\\ &+\frac{1}{2}\left(y-y_\varepsilon^I\left(t_0\right)\right)' \frac{\left\|y_\varepsilon^I\left(t_0\right)-y_0\right\|^2 E^{(n+1)}-\left(y_\varepsilon^I\left(t_0\right)-y_0\right)\left(y_\varepsilon^I\left(t_0\right)-y_0\right)'}{\left\|y_\varepsilon^I\left(t_0\right)-y_0\right\|^3}\left(y-y_\varepsilon^I\left(t_0\right)\right)+\\ &+o\left(\left\|y-y_\varepsilon^I\left(t_0\right)\right\|^2\right).\end{aligned}$$

где $o\left(\left\|y-y_\varepsilon^I\left(t_0\right)\right\|^2\right) / \left(\left\|y-y_\varepsilon^I\left(t_0\right)\right\|\right)^2 \rightarrow 0$ при $y \rightarrow y_\varepsilon^I\left(t_0\right)$, $E^{(n+1)}$ — единичная матрица размерности $(n+1) \times (n+1)$. Согласно выражению (2.9)

$$\varphi\left(t_0, y\right)=\nu\left(t_0\right)+\kappa'\left(t_0\right)\left(y-y_\varepsilon^I\left(t_0\right)\right)+\frac{1}{2}\left(y-y_\varepsilon^I\left(t_0\right)\right)' \chi\left(t_0\right) \cdot \cdot\left(y-y_\varepsilon^I\left(t_0\right)\right).$$

По определению $y_\varepsilon^I\left(t_0\right)-y_0=\begin{pmatrix} x^I\left(t_0\right) \\ -\varepsilon \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ -\varepsilon \end{pmatrix}$, и $\left\|y_\varepsilon^I\left(t_0\right)-y_0\right\|=\varepsilon$. Тогда

$$\nu\left(t_0\right)=\varepsilon, \qquad \kappa\left(t_0\right)=\begin{pmatrix} \theta \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \chi\left(t_0\right)=\begin{pmatrix} \varepsilon^{-1} E^{(n)} & \theta \\ \theta' & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.12)$$

где θ — нулевой вектор размерности n, $E^{(n)}$ — единичная матрица размерности $n \times n$.

Непосредственной подстановкой убеждаемся, что функции $\nu(t)=\varepsilon$, $\kappa(t)=\begin{pmatrix}\theta \\ -1\end{pmatrix}$,

$\chi(t)=\begin{pmatrix}\sigma(t) & \theta \\ \theta' & 0\end{pmatrix}$, удовлетворяют системе (2.11),(2.12), если матричная функция $\sigma(t)$ размерности $n \times n$ определяется как решение дискретного уравнения Риккати вида

$$f_x^{'}\sigma(t+1)f_x-(1-g)E^{(n)}-f_x^{'}\sigma(t+1)f_u\left[f_u^{'}\sigma(t+1)f_u-gE^{(r)}\right]^{-1}f_u^{'}\sigma(t+1)f_x=\sigma(t),$$

где производные функции *f* подсчитываются в точке $\left(t,x^I(t),u^I(t)\right)$.

Приближенное решение уравнения Беллмана (2.3)-(2.4) будет иметь вид

$$\varphi(t,u)=-x^0+\frac{1}{2}\left(x-x^I(t)\right)^{'}\sigma(t)\left(x-x^I(t)\right). \qquad (2.13)$$

Определение 3. Будем называть локальной аппроксимацией множества достижимости системы (1.1)-(1.2) в окрестности точки $x^I(t_1)$ множество

$$S(x^I(t))=\left\{(x,x_0)\in\mathbb{R}^{n+1}: x^0=\frac{1}{2}\left(x-x^I(t_1)\right)^{'}\sigma(t_1)\left(x-x^I(t_1)\right)\right\}.$$

Определим вспомогательную функцию $F_\alpha\{(x)\}=\alpha F(x)+(1-\alpha)x^0$, $\alpha\in(0,1)$. Минимум функции $F_a(x)$ по x при условии $x^0=\frac{1}{2}\left(x-x^I(t_1)\right)^{'}\sigma(t_1)\left(x-x^I(t_1)\right)$ обозначим $x^*(\alpha)$. Очевидно, что точка $x^*(\alpha)$ есть некоторое приближение к решению задачи минимизации исходного функционала на множестве достижимости, и, зная ее, можно построить допустимый управляемый процесс. Рассмотрим функцию $\tilde{u}(t,y)$, заданную равенством (2.7). Вычисляя производные R с учетом (2.13), получим, что $\tilde{u}(t,y)$ зависит только от переменных t, x, которую обозначим через $\hat{u}(t,y)$:

$$\hat{u}(t,y)=u^I(t)-\left[f_u^{'}\sigma(t+1)f_u-gE^{(r)}\right]^{-1}f_u^{'}\sigma(t+1)f_x\left(x-x^I(t)\right), \qquad (2.14)$$

где $E^{(r)}$ — единичная матрица размерности $r \times r$.

Исследуем систему, где траектория в конечный момент совпадает с точкой $x^*(\alpha)$

$$x(t+1)=f\left(t,x(t),\hat{u}(t,x(t))\right), \qquad (2.15)$$

$$x(t_1)=x^*(\alpha). \qquad (2.16)$$

Для поиска траектории линеаризуем уравнение (2.15)

$$\Delta x(t+1)=f_x\left(t,x^I(t),u^I(t)\right)\Delta x(t)+f_u\left(t,x^I(t),u^I(t)\right)\Delta\hat{u}(t,x(t)). \qquad (2.17)$$

Из (2.14) ясно, что

$$\Delta\hat{u}(t,x)=\left[f_u^{'}\sigma(t+1)f_u-gE^{(r)}\right]^{-1}f_u^{'}\sigma(t+1)f_x\Delta x(t)..$$

Подставим найденное приращение $\hat{u}(t,x)$ в (2.17)

$$\Delta x(t+1)=\left\{f_x-f_u\left[f_u^{'}\sigma(t+1)f_u-gE^{(r)}\right]^{-1}f_u^{'}\sigma(t+1)f_x\right\}\Delta x(t)$$

или

$$x(t)=x^I(t)+\left\{f_x-f_u\left[f_u^{'}\sigma(t+1)f_u-gE^{(r)}\right]^{-1}f_u^{'}\sigma(t+1)f_x\right\}^{-1}\times$$
$$\times\left(x(t+1)-x^I(t+1)\right). \qquad (2.18)$$

Обозначим $\hat{x}_\alpha(t)$, $t\in T$ — решение системы (2.18), (2.16). Построим программу управления таким образом, что $u_\alpha^{II}(t)=\hat{u}(t,\hat{x}_\alpha(t))$, и имеем $x_\alpha^{II}(t)$ как решение исходной системы (1.1)-(1.2) при заданном управлении $u_\alpha^{II}(t)$. С помощью выбора параметра α примем пару $\left(x_\alpha^{II},u_\alpha^{II}\right)$ за новое приближение в задаче улучшения (1.1)-(1.2), (1.4).

Алгоритм 1 (Базовый алгоритм улучшения).

1. Фиксируя $\varepsilon > 0$ и $g \in (0,1]$, решаем матричное уравнение

$$A'(t)\{\sigma(t+1) - \sigma(t+1)B(t)[B'(t)\sigma(t+1)B(t) - gE^{(r)}]^{-1} B'(t)\sigma(t+1)\}A(t) = \\ = \sigma(t)| + (1-g)E^{(n)}, \qquad \sigma(t_0) = \varepsilon^{-1} E^{(n)}. \tag{2.19}$$

Здесь $A(t) = f_x(t, x^I(t), u^I(t))$, $\quad B(t) = f_u(t, x^I(t), u^I(t))$, $\quad t \in T$.

2. Пусть $\alpha \in (0,1)$ и найдем $x^*(\alpha)$ как точку минимума функции

$$F_\alpha(x) = \alpha F(x) + \frac{1-\alpha}{2}(x - x^I(t_1))' \sigma(t_1)(x - x^I(t_1))..$$

3. Определим $\hat{x}_\alpha(t)$, решая систему

$$x(t) = x^I(t) + (A(t) - B(t)[B'(t)\sigma(t+1)B(t) - gE^{(r)}]^{-1} B'(t)\sigma(t+1)A(t))^{-1} \times \\ \times (x(t+1) - x^I(t+1)), \qquad x(t_1) = x^*(\alpha).$$

4. Найдем решение $x_\alpha^{II}(t)$ системы

$$x(t+1) = f(t, x(t), u_\alpha^{II}(t)), \qquad x(t_0) = x_0,$$

где

$$u_\alpha^{II}(t) = u^I(t) - [B'(t)\sigma(t+1)B(t) - gE^{(r)}]^{-1} B'(t)\sigma(t+1)A(t)(\hat{x}_\alpha(t) - x^I(t)), \qquad t \in T.$$

5. Решаем задачу одномерной минимизации:

$F(x_\alpha^{II}(t_1)) \to \min\limits_\alpha$ при условии $\alpha \in [0,1]$.

Принимаем управляемый процесс (x^{II}, u^{II}) за новое приближение в задаче улучшения.

3. СВЯЗЬ МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ РИККАТИ С ЗАДАЧЕЙ ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Пусть задана линейная дискретная цепочка со свободным левым концом

$$x(t+1) = A(t)x(t)| + B(t)u(t), \qquad x(t_1) = x_1, \qquad u(t) \in \mathbb{R}^r, \qquad t \in T, \tag{3.1}$$

и квадратичным функционалом качества

$$J(x,u) = \varepsilon^{-1} x'(t_0)x(t_0) + \frac{1}{2}\sum_{t=t_0+1}^{t_1}[(1-g)x'(t)x(t) + gu'(t)u(t)]. \tag{3.2}$$

Цель состоит в определении оптимального синтеза $\widetilde{u}(t,x)$, минимизирующего $J(x,u)$. Такой синтез реализуется регулятором с обратной связью [24]. Для задачи (3.1)-(3.2) согласно ([3], с. 155):

a) функция Беллмана является положительно определенной квадратичной формой вида

$$\varphi(t,x) = \frac{1}{2}x'\sigma_1(t)x, \tag{3.3}$$

$\sigma_1(t) - n \times n$ симметрическая матрица;

b) уравнения на неизвестную функцию $\sigma_1(t)$ выглядят следующим образом

$$A'(t)\sigma_1(t+1)A(t) - A'(t)\sigma_1(t+1)B(t)[B'(t)\sigma_1(t+1)B(t) - gE^{(r)}]^{-1} \times \\ \times B'(t)\sigma_1(t+1)A(t) - \sigma_1(t) + (1-g)E^{(n)} = 0, \qquad \sigma_1(t_0) = \varepsilon^{-1} E^{(n)}; \tag{3.4}$$

c) оптимальный синтез имеет вид

$$\hat{u}(t,y) = -[B'(t)\sigma_1(t+1)B(t) - gE^{(r)}]^{-1} B'(t)\sigma_1(t+1)A(t)x. \tag{3.5}$$

Нетрудно видеть, что уравнения (3.4) и (2.19) совпадают $\forall t \in T$, следовательно $\sigma(t)$ — положительно определена, и следовательно невырожденная. Этот факт понадобится для доказательства следующей теоремы.

4. ТЕОРЕМА О РЕЛАКСАЦИИ

Согласно доказанной лемме в [14,15] существует $\alpha_0 \in (0,1)$, при котором точку минимума $x^*(\alpha)$ в задаче $F_\alpha(x) = \alpha F(x) + \frac{1-\alpha}{2}\left(x - x^I(t_1)\right)'\sigma(t_1)\left(x - x^I(t_1)\right) \to \min$ для $0 \le \alpha \le \alpha_0$ можно искать, решая уравнение (5.1).

Применяя формулу Лагранжа, получим

$$F_x(x^*(\alpha)) = F_x(x^I(t_1)) - \frac{\alpha}{1-\alpha}F_{xx}(\xi(\alpha))\sigma^{-1}(t_1)F_x(x^*(\alpha)),$$

где $\xi(\alpha) = x^I(t_1) + \theta_\alpha\left(x^*(\alpha) - x^I(t_1)\right)$, $\quad 0 < \theta_\alpha < 1$. Из этого\

$$F_x(x^*(\alpha)) = \left[E^{(n)} + \frac{\alpha}{1-\alpha}F_{xx}(\xi(\alpha))\sigma^{-1}(t_1)\right]^{-1} F_x(x^I(t_1)).$$

Учитывая (4.1), получим

$$x^*(\alpha) - x^I(t_1) = -\alpha\left[\alpha F_{xx}(\xi(\alpha)) + (1-\alpha)\sigma(t_1)\right]^{-1} F_x\left(x^I(t_1)\right). \tag{4.2}$$

По формуле Лагранжа, можно записать

$$f\left(t, \hat{x}_\alpha(t), \hat{u}(t, \hat{x}_\alpha(t))\right) - f\left(t, x^I(t), u^I(t)\right) =$$

$$= \frac{d}{dt}\left(f(t, \eta_\alpha(t), \hat{u}(t, \eta_\alpha(t)))\right)\left(\hat{x}_\alpha(t) - x^I(t)\right) =$$

$$= \left(f_x(t, \eta_\alpha(t), \hat{u}(t, \eta_\alpha(t))) + f_u(t, \eta_\alpha(t), \hat{u}(t, \eta_\alpha(t)))\hat{u}_x(t, \eta_\alpha(t))\right)\left(\hat{x}_\alpha(t) - x^I(t)\right),$$

где $\eta_\alpha(t) = x^I(t) + \theta_\alpha\left(\hat{x}_\alpha(t) - x^I(t)\right)$, $\quad 0 < \theta_\alpha < 1$. Обозначим

$$C_\alpha(t) = f_x(t, \eta_\alpha(t), \hat{u}(t, \eta_\alpha(t))) + f_u(t, \eta_\alpha(t), \hat{u}(t, \eta_\alpha(t)))\hat{u}_x(t, \eta_\alpha(t)).$$

Тогда $\hat{x}_\alpha(t+1) - x^I(t+1) = C_\alpha(t)\left(\hat{x}_\alpha(t) - x^I(t)\right)$, $\quad \hat{x}_\alpha(t_1) = x^*(\alpha)$. По формуле (см. [16, с. 516]), имеем

$$\hat{x}_\alpha(t) = x^I(t) + \Psi_\alpha(t)\left(x^*(\alpha) - x^I(t_1)\right), \tag{4.3}$$

где матрица $\Psi_\alpha(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\Psi_\alpha(t+1) = C_\alpha(t)\Psi_\alpha(t), \quad \Psi_\alpha(t_1) = E^{(n)}, \quad t \in \{t_0, \ldots, t_1 - 1\}.$$

Построим программу управления $u_\alpha^{II}(t) = \hat{u}(t, \hat{x}_\alpha(t))$ и рассмотрим решение $x_\alpha^{II}(t)$ системы из п. 4 алгоритма 1. Используя формулу конечных приращений, получим

$$f\left(t, x_\alpha^{II}(t), u_\alpha^{II}(t)\right) - f\left(t, x^I(t), u^I(t)\right) =$$

$$= f_x\left(t, \varsigma_\alpha(t), u_\alpha^{II}(t)\right)\left(x_\alpha^{II}(t) - x^I(t)\right) + f_u\left(t, x^I(t), \vartheta_\alpha(t)\right)\left(u_\alpha^{II}(t) - u^I(t)\right),$$

где $\varsigma_\alpha(t) = x^I(t) + \theta'_\alpha\left(x_\alpha^{II}(t) - x^I(t)\right)$, $\quad \vartheta_\alpha(t) = u^I(t) + \theta''_\alpha\left(u_\alpha^{II}(t) - u^I(t)\right)$, $\quad 0 < \theta'_\alpha, \theta''_\alpha < 1$.

Обозначим $A_\alpha(t) = f_x\left(t, \varsigma_\alpha(t), u_\alpha^{II}(t)\right)$,

$$D_\alpha(t) = f_u\left(t, x^I(t), \vartheta_\alpha(t)\right)\left(u_\alpha^{II}(t) - u^I(t)\right). \tag{4.4}$$

Тогда решение системы из п. 4 удовлетворяет равенству

$$x_\alpha^{II}(t+1) - x^I(t+1) = A_\alpha(t)\left(x_\alpha^{II}(t) - x^I(t)\right) + D_\alpha(t)$$

и представимо в виде

$$x_\alpha^{II}(t) = x^I(t) + \sum_{\tau=t_0}^{t-1} \Xi_\alpha(t)\Xi_\alpha^{-1}(\tau+1)D_\alpha(\tau),$$

где матрица $\Xi_\alpha(t)$ является решением матричного уравнения

$$\Xi_\alpha(t+1) = A_\alpha(t)\Xi_\alpha(t), \quad \Xi_\alpha(t_0) = E^{(n)}, \quad t \in \{t_0, \ldots, t_1 - 1\}.$$

По формуле Тейлора найдется $\eta(\alpha) = x^I(t_1) + \theta_\alpha\left(x_\alpha^{II}(t_1) - x^I(t_1)\right), \theta_\alpha \in (0,1)$ такое, что

$$F(x_\alpha^{II}(t_1)) - F(x^I(t_1)) = F_x^{'}(x^I(t_1))\sum_{\tau=t_0}^{t_1-1}\Xi_\alpha(t)\Xi_\alpha^{-1}(\tau+1)D_\alpha(\tau) +$$
$$+\frac{1}{2}\left(\sum_{\tau=t_0}^{t_1-1}\Xi_\alpha(t_1)\Xi_\alpha^{-1}(\tau+1)D_\alpha(\tau)\right)^{'} F_{xx}(\eta(\alpha))\sum_{\tau=t_0}^{t_1-1}\Xi_\alpha(t_1)\Xi_\alpha^{-1}(\tau+1)D_\alpha(\tau). \tag{4.5}$$

Согласно (4.3) будем иметь

$$u_\alpha^{II}(t) = u^I(t) - \hat{u}_x(t,\mu_\alpha(t))\Psi_\alpha(t)\left(x^*(\alpha) - x^I(t_1)\right), \tag{4.6}$$

где $\mu_\alpha(t) = x^I(t) + \theta_\alpha\left(\hat{x}_\alpha(t) - x^I(t)\right)$, $0 < \theta_\alpha < 1$. Продолжая равенство (4.5) с учетом (4.4) и (4.6), запишем

$$F(x_\alpha^{II}(t_1)) - F(x^I(t_1)) = F_x^{'}(x^I(t_1))\Phi_\alpha(t_1)(x^*(\alpha) - x^I(t_1)) +$$
$$+\frac{1}{2}\left(x^*(\alpha) - x^I(t_1)\right)^{'}\Phi_\alpha^{'}(t_1)F_{xx}(\eta(\alpha))\Phi_\alpha(t_1).(x^*(\alpha) - x^I(t_1)),$$

где $\Phi_\alpha(t) = \sum_{\tau=t_0}^{t-1}\Xi_\alpha(t)\Xi_\alpha^{-1}(\tau+1)f_u\left(\tau, x^I(\tau), \vartheta_\alpha(\tau)\right)\hat{u}_x(\tau,\mu_\alpha(\tau))\Psi_\alpha(\tau).$

Тогда в силу (4.2)

$$F(x_\alpha^{II}(t_1)) - F(x^I(t_1)) = -\alpha\omega(\alpha), \tag{4.7}$$

где

$$\omega(\alpha) = F_x^{'}(x^I(t_1))[\ \Phi_\alpha(t_1)[\alpha F_{xx}(\xi(\alpha) - (1-\alpha)\sigma(t_1)]^{-1} -$$
$$-\frac{1}{2}\alpha[\alpha F_{xx}(\xi(\alpha) - (1-\alpha)\sigma(t_1)]^{-1}\Phi_\alpha^{'}(t_1)F_{xx}(\eta(\alpha))\Phi_\alpha(t_1)\times$$
$$\times[\alpha F_{xx}(\xi(\alpha) + (1-\alpha)\sigma(t_1)]^{-1}\ \ ]F_x(x^I(t_1)).$$

Ясно, что $\hat{x}_\alpha(t) \to x^1(t)$, $\hat{x}_\alpha^{II}(t) \to x^1(t)$ при $\alpha \to 0$ при $t \in T = \{t_0,\dots,t_1\}$. Очевидно, что функция $\hat{u}(t,x)$ непрерывна по x вместе со своей производной в точке $x^1(t)$. Тогда $u_\alpha^{II}(t) \to u^1(t)$, $\alpha \to 0$ и для промежуточных точек имеем $\xi(\alpha) \to x^1(t_1)$, $\eta(\alpha) \to x^1(t_1)$, $\vartheta_\alpha \to x^1(t)$, $\mu_\alpha(t) \to x^1(t)$, $\varsigma_\alpha \to x^1(t)$, $\eta_\alpha(t) \to x^1(t)$ при $\alpha \to 0$ по всем $t \in T$.

Введем функции $.\Xi(t)$и $\Psi(t)$, как решения линейных матричных уравнений

$$.\Xi(t+1) = A(t)\Xi(t), \quad \Xi(t_0) = E^{(n)}, \tag{4.8}$$

$$.\Psi(t+1) = C(t)\Psi(t), \quad \Psi(t_1) = E^{(n)}, \tag{4.9}$$

соответственно. Здесь $.A(t) = f_x\left(t, x^I(t), u^I(t)\right)$,
$C(t) = f_x\left(t, x^I(t), u^I(t)\right) + f_u\left(t, x^I(t), u^I(t)\right)\hat{u}_x\left(t, x^I(t)\right).$

Согласно условию, что функция $f(t,x,u)$ определена при каждом $t \in T$ и дважды непрерывно дифференцируема по (x,u), имеем $A_\alpha(t) \to A(t), C_\alpha(t) \to C(t), \alpha \to 0$. Очевидно, что $.\Xi_\alpha(t) \to \Xi(t)$, $.\Phi_\alpha(t) \to \Phi(t)$, $\alpha \to 0, t \in T$. Отсюда $\lim_{\alpha\to 0}.\Phi_\alpha(t) \to \Phi(t)$,

где

$$\Phi(t) = \sum_{\tau=t_0}^{t-1}\Xi(t)\Xi^{-1}(\tau+1)f_u\left(\tau, x^I(\tau), u^I(\tau)\right)\hat{u}_x\left(\tau, x^I(\tau)\right)\Psi(\tau), \tag{4.10}$$

и скалярная функция $\omega(\alpha)$ непрерывна в нуле. Будем предполагать, что

$$F_x^{'}(x^I(t_1))\Phi(t_1)\sigma^{-1}(t_1)F_x(x^I(t_1)) > 0.$$

Тогда существует 0 < α_0 < 1, для которого $\omega(\alpha) > 0, \quad 0 < \alpha \le \alpha_0$. Таким образом, согласно (5.7), $F(x_\alpha^{II}(t_1)) - F(x^I(t_1))$ < 0 для всех $0 < \alpha \le \alpha_0$ и пару $\left(x_\alpha^{II}(t), u_\alpha^{II}(t)\right) \in D$, $0 < \alpha \le \alpha_0$ можно принять за новое приближение $\left(x^{II}(t), u^{II}(t)\right)$ в задаче улучшения. Тем самым доказана следующая теорема.

Теорема 2 (релаксационность алгоритма). *Пусть управляемый процесс* $\left(x^I(t), u^I(t)\right) \in D$ *такой, что удовлетворяет условию*

$$F_x^{'}(x^I(t_1))\Phi(t_1)\sigma^{-1}(t_1)F_x(x^I(t_1)) > 0. \tag{4.11}$$

Тогда для элемента $\left(x^{II}(t), u^{II}(t)\right) \in D$, *построенного с помощью алгоритма* 1, *имеет место неравенство*

$$I\left(x^{II}, u^{II}\right) < I\left(x^I, u^I\right)..$$

Условие (4.11), обеспечивающее релаксационность алгоритма, эквивалентно не выполнению условия стационарности для исходной системы (1.1)-(1.2), (1.4). Рассмотрим функцию Понтрягина для этой системы

$$H(t, x, p(t+1), u) = p'(t+1) f(t, x, u), \qquad p \in \mathbb{R}^n. \tag{4.12}$$

Тогда справедлива следующая

Теорема 3. Пусть управляемый процесс $\left(x_\alpha^{II}(t), u_\alpha^{II}(t)\right) \in D$, *такой, что*

$$\begin{aligned} &\sum_{\tau=t_0}^{t_1-1} H_u^{'}\left(t, x^I(t), p^I(t+1), u^I(t)\right) H_u\left(t, x^I(t), p^I(t+1), u^I(t)\right) = \\ &= \sum_{\tau=t_0}^{t_1-1} p^{I'}(t+1) B(t) B'(t) p^I(t+1) > 0, \end{aligned} \tag{4.13}$$

где $p^I(t)$ *удовлетворяет сопряженной системе*

$$p^I(t) = A'(t) p^I(t+1), \qquad p^I(t_1) = -F_x\left(x^I(t_1)\right). \tag{4.14}$$

Тогда элемент $\left(x^I, u^I\right)$ *улучшается алгоритмом* 1.

Замечание 1. Необходимым условием оптимальности для задачи (1.1)-(1.2), согласно [27, с. 112] является

$$H_u\left(t, x^I(t), p^I(t+1), u^I(t)\right)\left(u(t) - u^I(t)\right) \le 0, \qquad u(t) \in U(t), t \in T. \tag{4.15}$$

Случай 1. Считаем $u(t) \ne u^I(t)$ и $H_u\left(t, x^I(t), p^I(t+1), u^I(t)\right) \ne 0, \quad t \in T$, т.е. $u^I(t)$ не является внутренней точкой множества $U(t)$.

Применяя к левой части неравенства (5.15) неравенство Коши-Буняковского, получим

$$\begin{aligned} &0 < \left|\left(H_u\left(t, x^I(t), p^I(t+1), u^I(t)\right)\left(u(t) - u^I(t)\right)\right)\right| \le \\ &\le \left(H_u\left(t, x^I(t), p^I(t+1), u^I(t)\right), H_u\left(t, x^I(t), p^I(t+1), u^I(t)\right)\right) \times \\ &\times \left(u(t) - u^I(t), u(t) - u^I(t)\right). \end{aligned}$$

При сделанных предположениях очевидно, что $\left(u(t) - u^I(t), u(t) - u^I(t)\right) > 0$. Следовательно,

$$\left(H_u\left(t, x^I(t), p^I(t+1), u^I(t)\right), H_u\left(t, x^I(t), p^I(t+1), u^I(t)\right)\right) > 0. \tag{4.16}$$

Суммируя по времени $t \in \{t_0, ..., t_1 - 1\}$ левую часть выражения (4.16), имеем

$$\begin{aligned} &\sum_{\tau=t_0}^{t_1-1}\left(H_u\left(t, x^I(t), p^I(t+1), u^I(t)\right) H_u\left(t, x^I(t), p^I(t+1), u^I(t)\right)\right) = \\ &= H_u^{'}\left(t, x^I(t), p^I(t+1), u^I(t)\right) H_u\left(t, x^I(t), p^I(t+1), u^I(t)\right) > 0, \end{aligned}$$

что совпадает с условием (5.13) теоремы 3.

Случай 2. Считаем $u^I(t)$ является внутренней точкой множества $U(t) = \mathbb{R}^r$, $t \in T$. Это случай, рассматриваемый в данной статье. Тогда $H_u\left(t, x^I(t), p^I(t+1), u^I(t)\right)=0, \quad t \in T$ - есть необходимое условие оптимальности [27, с. 112], при котором дальнейшее улучшение значения функционала не происходит. При всех $u(t) \neq u^I(t)$, $t \in T$ будет выполняться условие (4.13).

Доказательство к теореме 3 находится в Приложении.

5. МОДИФИЦИРОВАННЫЙ АЛГОРИТМ УЛУЧШЕНИЯ, ОСНОВАННЫЙ НА РАЗЛОЖЕНИИ ПО ПАРАМЕТРУ КОНСТРУКЦИЙ БАЗОВОГО МЕТОДА

Параметр α отвечает за одномерную минимизацию. Можно работать с фиксированным параметром *g,* тогда вся задача сводится к минимизации по α. Можно варьировать оба параметра, что позволяет на итерациях делать более глубокое улучшение по сравнению с фиксированным *g*. Например, *g* можно брать равным 1 при этом теоремы об улучшении сохранятся и в результате в алгоритме будет только один параметр α. А параметр ε фиксирован и_близкий к нулю, определяется точностью вычислений конкретной ЭВМ.

Весовой коэффициент (параметр) *g* определяет относительный вес двух слагаемых. При $g \to 1$ доминирует слагаемое, учитывающее отклонение по управлению *Au = u — u¹,* а при $\Delta u = u - u^I$, а при $g \to 0$ — слагаемое, учитывающее отклонение по состоянию $\Delta x = x - x^I$. При соответствующем выборе параметра может быть обеспечена близость траекторий $x^I(t)$ и $x^{II}(t)$, и управлений $u^I(t)$ и $u^{II}(t)$, так как, для дискретных систем близость по *x* означает близость по *u*. При различных параметрах *g* для конкретных вычислительных задач значения улучшенного функционала могут значительно отличаться, хотя этот параметр можно исключить, положив $g = 1$.

Решение матричного уравнения (2.19), и соответственно, функция $\sigma(t)$, на каждом шаге времени и итерации зависит от значения *g,* таким образом будем рассчитывать $\sigma = \sigma(t, g)$ с помощью тейлоровской аппроксимации первого порядка по параметру *g:*

$$\sigma(t, g) = \sigma(t, g^*) + \frac{d\sigma(t, g^*)}{dg}(g - g^*),$$

где $g^* \in (0,1]$ фиксированное. Вычислим производную $\dfrac{d\sigma(t, g^*)}{dg}$, для этого продифференцируем уравнение (2.19) по g :

$$\begin{aligned}
&A'(t)\left\{\frac{d\sigma(t+1, g^*)}{dg} - \frac{d\sigma(t+1, g)}{dg} B(t)\left[B'(t)\sigma(t+1, g)B(t) - gE^{(r)}\right]^{-1} \times\right. \\
&\times B'(t)\sigma(t+1, g) - \sigma(t+1, g)B(t)\left[B'(t)\sigma(t+1, g)B(t) - gE^{(r)}\right]^{-1} B'(t) \times \\
&\times \frac{d\sigma(t+1, g)}{dg} + \sigma(t+1, g)B(t)\left[B'(t)\sigma(t+1, g)B(t) - gE^{(r)}\right]^{-1} B'(t) \times \\
&\times \left[B'(t)\frac{d\sigma(t+1, g)}{dg}B(t) - E^{(r)}\right]\left[B'(t)\sigma(t+1, g)B(t) - gE^{(r)}\right]^{-1} \times \\
&\left.\times B'(t)\sigma(t+1, g)\right\}A(t) = \frac{d\sigma(t, g)}{dg} - E^{(n)}, \qquad \frac{d\sigma(t_0, g)}{dg} = 0.
\end{aligned} \tag{5.1}$$

Определим $C_1(t, \sigma(t+1, g)) = B(t)\left[B'(t)\sigma(t+1, g)B(t) - gE^{(r)}\right]^{-1} B'(t)$. Такая матрица является симметрической матрицей размерности $n \times n$.

Тогда уравнение (5.1) запишется в виде:

$$A'(t)\left\{\frac{d\sigma(t+1,g^*)}{dg}-\frac{d\sigma(t+1,g)}{dg}C_1(t,\sigma(t+1,g))\sigma(t+1,g)-\right.$$
$$-\sigma(t+1,g)C_1(t,\sigma(t+1,g))\frac{d\sigma(t+1,g)}{dg}+$$
$$\left.+\sigma(t+1,g)C_1(t,\sigma(t+1,g))\frac{d\sigma(t+1,g)}{dg}C_1(t,\sigma(t+1,g))\sigma(t+1,g)\ \right\}A(t)- \tag{5.2}$$
$$-A'(t)\sigma(t+1,g)B(t)\left[B'(t)\sigma(t+1,g)B(t)-gE^{(r)}\right]^{-2}B'(t)\sigma(t+1,g)A(t)=$$
$$=\frac{d\sigma(t,g)}{dg}-E^{(n)},\qquad \frac{d\sigma(t_0,g)}{dg}=0.$$

Это уравнение линейно относительно $\dfrac{d\sigma(t,g)}{dg}$, $\quad t\in T$.

Обозначим

$$X=\sigma(t+1,g),$$
$$X_g=\frac{d\sigma(t,g)}{dg},$$
$$B_1=A'(t)\sigma(t+1,g)B(t)\left[B'(t)\sigma(t+1,g)B(t)-gE^{(r)}\right]^{-2}B'(t)\sigma(t+1,g)A(t)+$$
$$|+\frac{d\sigma(t,g)}{dg}-E^{(n)}.$$

Зафиксировав момент времени t и считая, что матрицы X, A, B, $\dfrac{d\sigma(t,g)}{dg}$ - известны, следовательно B_1 тоже определена, перепишем уравнение (6.2) в матричном -------- виде

$$A'X_gA-A'X_gC_1XA-A'XC_1X_gA+A'XC_1X_gC_1XA=B_1,\qquad X_g(t_0)=0$$

и найдем его решение X_g. Определим матрицы:

$$A'XC_1=G_1,\qquad A'-G_1=V. \tag{5.3}$$

Используя (5.3), имеем

$$A'X_gA-A'X_gG_1'-G_1X_gA+G_1X_gG_1'=B_1,$$
$$A'(X_gA-X_gG_1')-G_1(X_gA-X_gG_1')=B_1,$$
$$(A'-G_1)X_g(A-G_1')=B_1,$$
$$VX_gV^{-1}=B_1.$$

Будем считать, что V — невырожденная матрица, получаем

$$X_g=V^{-1}B_1V'^{-1}.$$

Или

$$\frac{d\sigma(t+1,g)}{dg}=\left(A'-A'XB\left[B'XB-gE^{(r)}\right]^{-1}B'\right)^{-1}\times$$
$$\times\left(A'XB\left[B'XB-gE^{(r)}\right]^{-2}B'XA+\frac{d\sigma(t,g)}{dg}-E^{(n)}\right)\times$$
$$\times\left(A-B\left[B'XB-gE^{(r)}\right]^{-1}B'XA\right)^{-1},\qquad t\in T.$$

Сформулируем этапы нового алгоритма.

Алгоритм 2 (Алгоритм улучшения с разложением по параметру g)

1. Фиксируя $\varepsilon > 0$ и $g^* \in (0,1]$, решаем матричное уравнение

$$A'(t)\{\sigma(t+1,g^*) - \sigma(t+1,g^*)B(t)[B'(t)\sigma(t+1,g^*)B(t) - g^* E^{(r)}]^{-1} \times$$
$$\times B'(t)\sigma(t+1,g^*)\ \}A(t) = \sigma(t,g^*) + (1-g^*)E^{(n)}, \qquad \sigma(t_0,g^*) = \varepsilon^{-1}E^{(n)}.$$

Здесь $A(t) = f_x(t, x^I(t), u^I(t))$, $\quad B(t) = f_u(t, x^I(t), u^I(t))$, $\quad t \in T$. И находим $\sigma(t,g^*)$.

2. Решая уравнение

$$A'(t)\left\{\frac{d\sigma(t+1,g^*)}{dg} - \frac{d\sigma(t+1,g^*)}{dg}C_1(t,\sigma(t+1,g^*))\sigma(t+1,g^*) -\right.$$
$$-\sigma(t+1,g^*)C_1(t,\sigma(t+1,g^*))\frac{d\sigma(t+1,g^*)}{dg} +$$
$$+\sigma(t+1,g^*)C_1(t,\sigma(t+1,g^*))\frac{d\sigma(t+1,g^*)}{dg}C_1(t,\sigma(t+1,g^*))\sigma(t+1,g^*)\ \}A(t) -$$
$$-A'(t)\sigma(t+1,g^*)B(t)[B'(t)\sigma(t+1,g^*)B(t) - g^*E^{(r)}]^{-2}B'(t)\sigma(t+1,g^*)A(t) =$$
$$= \frac{d\sigma(t,g^*)}{dg} - E^{(n)}, \qquad \frac{d\sigma(t_0,g^*)}{dg} = 0.$$

где $\quad C_1(t,\sigma(t+1,g^*)) = B(t)[B'(t)\sigma(t+1,g^*)B(t) - g^*E^{(r)}]^{-1}B'(t)$. $\quad$ Находим $\dfrac{d\sigma(t,g^*)}{dg}$, $t \in \{t_0+1,\ldots,t_1\}$.

Таким образом, найдем $\sigma(t,g) = \sigma(t,g^*) + \dfrac{d\sigma(t,g^*)}{dg}(g-g^*)$, где $g^* \in (0,1]$ фиксированное.

3. Пусть $\alpha \in (0,1]$) и найдем $x^*(\alpha,g)$ как точку минимума функции

$$F_\alpha(x,g) = \alpha F(x) + \frac{1-\alpha}{\alpha}(x - x^I(t_1))'\sigma(t_1,g)(x - x^I(t_1)).$$

4. Определим $\hat{x}_\alpha(t,g) = x(t,g)$ при условии $x(t_1,g) = x^*(\alpha,g)$, решая систему

$$x(t,g) = x^I(t) + \{A(t) - B(t)[B'(t)\sigma(t+1,g)B(t) - gE^{(r)}]^{-1} \times$$
$$\times B'(t)\sigma(t+1,g)A(t)\}^{-1}(x(t+1,g) - x^I(t+1)).$$

5. Полагая

$$u_\alpha^{II}(t,g) = u^I(t) - [B'(t)\sigma(t+1,g)B(t) - gE^{(r)}]^{-1}B'(t)\sigma(t+1,g)A(t)(\hat{x}_\alpha(t,g) - x^I(t1)), t \in T,$$

найдем решение $x_\alpha^{II}(t,g)$ системы

$$x(t+1,g) = f(t, x(t,g), u_\alpha^{II}(t,g)), x(t_0,g) = x_0.$$

6. Решаем задачу двумерной минимизации:

$$F(x_\alpha^{II}(t_1,g)) \to \min_{\substack{\alpha\in[0,1]\\ g\in(0,1]}}.$$

Принимаем управляемый процесс (x^{II}, u^{II}) за новое приближение в задаче улучшения.

6. РЕЗУЛЬТАТЫ РЕШЕНИЯ ТЕСТОВЫХ ПРИМЕРОВ

Базовый метод и его модификация тестировались на трех задачах. В исходном алгоритме значение параметра g фиксировано на каждой итерации и не меняется, а значение параметра α выбирается в процедуре одномерной минимизации. В модифицированном алгоритме, начиная с некоторого значения, оба параметра изменяются соответственно тому как происходит операция минимизации. Критерием останова является близость двух последовательных приближений функционалов с некоторой точностью δ. Тестовые примеры получены путем дискретизации, непрерывных их аналогов с равными временными интервалами, чтобы избежать модульных ограничений на управление делалась замена переменных $u = \sin v$.

Пример 1.

$$\begin{cases} x_1(t+h) = x_1(t) + hx_2(t), \\ x_2(t+h) = x_2(t) + h(x_1(t) + u(t)), \\ x_1(0) = x_2(0) = 1, \quad |u(t)| \le 1, \end{cases}$$

$$I(x,u) = x_1(1) + x_2(1), t \in \{0, h, 2h, \ldots, 1\}.$$

.

Начальное управление $u^I(t) \equiv 0.5$. Результаты численных экспериментов были получены при параметре g = 0.5 для базового алгоритма, шаге дискретизации h = 0.01, точности вычисления функционала δ = 0.001.

Пример 2.

$$\begin{cases} x_1(t+h) = x_1(t) + h((1 - x_2^2(t))x_1(t) - x_2(t) + u(t)), \\ x_2(t+h) = x_2(t) + hx_1(t), \\ x_3(t+h) = x_3(t) + \dfrac{h}{2}(x_1^2(t) - x_2^2(t) + u^2(t)), \\ x_1(0) = x_2(0) = 1.5, \quad x_3(0) = 0, \\ |u(t)| \le 1.5, \end{cases}$$

$$I(x,u) = x_3(5), t \in \{0, h, 2h, \ldots, 5\}.$$

.

Начальное управление $u^I(t) \equiv 0$. Результаты численных экспериментов исходным алгоритмом при g = 0.5 и модифицированным алгоритмом при g^* = 0.7 были получены при шаге дискретизации h = 0.001, точности вычисления функционала δ = 0.001.

Пример 3.

$$\begin{cases} x_1(t+h) = x_1(t) + hx_2(t), \\ x_2(t+h) = x_2(t) + h(u(t) - \sin(x_1(t))), \\ x_1(0) = 5, x_2(0) = 0, \quad |u(t)| \le 1, \end{cases}$$

$$I(x,u) = x_1^2(5) + x_2^2(5), t \in \{0, h, 2h, \ldots, 5\}.$$

.

Начальное управление $u^I(t) \equiv 0.4$. Значение функционала на начальном приближении равно $I(x^I, u^I) = 163.29.$. Результаты численных экспериментов исходным алгоритмом при g = 0.1, модифицированным алгоритмом, а также исходным алгоритмом с g = 0.7 были получены при шаге дискретизации h = 0.2, точности вычисления функционала δ = 0.001. Начальное значение параметра g для алгоритма с одномерной минимизацией взяли равным 0.7 по итогам тестовых испытаний.

В линейной задаче (пример 1) и базовый алгоритм, и модифицированный - за одну итерацию привели к оптимальному решению. В примерах 2,3 с нелинейной дискретной системой у модифицированного алгоритма количество итераций меньше при достижении заданной точности вычисления функционала δ, чем у исходного алгоритма.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Базовый алгоритм исследован на релаксационность. С помощью подхода, основанного на разложении по параметру д конструкций исходного метода, получен модифицированный алгоритм. Итерация такого алгоритма помогает автоматизировать подбор эффективных параметров по сравнению с итерацией исходного метода. Решение тестовых примеров показывает эффективность модифицированного алгоритма по сравнению с исходным методом на исследованных примерах.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 3. Предполагаем, что допустимый процесс $\left(x^I(t), u^I(t)\right)$такой, что выполнено неравенство

(П.1) $$\sum_{t=t_0}^{t_1-1} p^{I'}(t+1)B(t)B'(t)p^I(t+1) > 0,$$

где $p^I(t)$ получено из условий (5.14). Применяя аналог формулы Коши для дискретных линейных уравнений, выводим

$$p^I(t) = -\Xi^*(t)F_x\left(x^I(t_1)\right),$$

где $\Xi^*(t)$ - решение матричного уравнения

$$\Xi^*(t) = A'(t)\Xi^*(t+1), \qquad \Xi^*(t_1) = E^{(n)}.$$

Функция $\Xi^*(t)$ связана с решением $\Xi(t)$системы (5.8) равенством

$$\Xi^*(t) = \left[\Xi(t_1)\Xi^{-1}(t)\right]', \qquad t \in T.$$

В силу предположения (П.1) имеем

(П.2) $$\sum_{t=t_0}^{t_1-1} F_x^{'}\left(x^I(t_1)\right)\Xi(t_1)\Xi^{-1}(t+1)\Xi B(t)B'(t)\Xi^{-1'}(t+1)\Xi'(t_1)F_x\left(x^I(t_1)\right) > 0.$$

Пусть $\sigma(t)$ решение уравнения (3.19). Запишем его в виде соотношения

$$\sigma(t) = A'(t)\sigma(t+1)C(t) - (1-g)E^{(n)}.$$

Считая, что $\sigma(t_1)$ фиксированное, получим

$$\sigma(t) = \Xi^*(t)\sigma(t_1)\Psi^*(t) - (1-g)\sum_{\tau=t_0}^{t_1-1}\Xi^*(t)\Xi^{*-1}(\tau)\Psi^{*-1}(\tau)\Psi^*(t),$$

где $\Psi^*(t)$ удовлетворяет системе

$$\Psi^*(t) = \Psi^*(t+1)C(t), \qquad \Psi^*(t_1) = E^{(n)}.$$

Поскольку $\Psi^*(t) = \Psi^{-1}(t), \quad t \in T$, а $\Psi(t)$ — матрица, удовлетворяющая (5.9). Таким образом

(П.3) $$\sigma(t) = \Xi^{-1'}(t)\Xi'(t_1)\sigma(t_1)\Psi^{-1}(t) - (1-g)M(t),$$

где $M(t) = \sum_{\tau=t_0}^{t_1-1}\Xi^{-1'}(t)\Xi'(\tau)\Psi(\tau)\Psi^{-1}(t).$

Учитывая пункты (П.2)-(П.3) совместно, имеем

(П.4) $$\beta := \sum_{t=t_0}^{t_1-1} F_x^{'}\left(x^I(t_1)\right)\Xi(t_1)\Xi^{-1}(t+1)B(t)B'(t)\times$$
$$\times\left[\sigma(t+1) + (1-g)M(t+1)\right]C(t)\Psi'(t)\sigma^{-1}(t_1)F_x\left(x^I(t_1)\right) > 0.$$

Обозначим

$$\gamma := \sum_{t=t_0}^{t_1-1} F_x^{'}\left(x^I(t_1)\right)\Xi(t_1)\Xi^{-1}(t+1)B(t)B'(.t)M(t+1)C(t)\Psi'(t)\sigma^{-1}(t_1)F_x\left(x^I(t_1)\right).$$

Рассмотрим два варианта. В первом, если $\gamma > 0$, то будем выбирать g_0 из условия $0 < 1 - g_0 < \dfrac{\beta}{\gamma}$. Тогда согласно (П.4) для всех $g : g_0 \le g < 1$

$$F_x^{'}\left(x^I(t_1)\right)\Phi(t_1)\sigma^{-1}(t_1)F_x\left(x^I(t_1)\right) > 0, \tag{П.5}$$

где $\Phi(t)$ — функция, определенная в условие (5.11) теоремы 2 и представленная в данном случае в виде

$$\Phi(t) = \frac{1}{g}\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\Xi(t)\Xi^{-1}(\tau+1)B(\tau)B'(\tau)\sigma(\tau+1)C(\tau)\Psi(\tau).$$

Во втором варианте, если $\gamma \le 0$, неравенство (П.5) будет выполнено в независимости от выбора параметра $g \in (0,1]$.

Подводя итог, справедливо условие (5.11) теоремы 2, в соответствии с которым процесс $\gamma > 0$ улучшается алгоритмом.

Теорема 3 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Болтянский, В.Г.* Оптимальное управление дискретными системами / В.Г. Болтянский. – М.: Наука, 1973.
2. *Габасов Р.* Основы динамического программирования / Р. Габасов, Ф.М. Кириллова. – Минск: Изд-во БГУ, 1975.
3. *Кротов В.Ф.* Методы и задачи оптимального управления / В.Ф. Кротов, В.И. Гурман. – М.: Наука, 1973.
4. *Пропой, А.И.* Элементы теории оптимальных дискретных процессов / А.И. Пропой. – М.: Наука, 1973.
5. *Батурин, В.А.* Приближенные методы оптимального управления, основанные на принципе расширения / В.А. Батурин, Д.Е. Урбанович. – Новосибирск: Наука, СО РАН, 1997.
6. *Гурман, В.И.* Принцип расширения в задачах управления / В.И. Гурман. – М.: Наука, 1997.
7. *Батурин, В.А.* Метод улучшения, основанный на локальных аппроксимациях множества достижимости, для дискретных управляемых систем // Тр. XII Байкальской междунар. конф. «Методы оптимизации и их приложения» / В.А. Батурин, Е.В. Гончарова. – Иркутск. 2001. – Т. 2. – С. 68-72.
8. *Гончарова, Е.В.* Об улучшении дискретных управляемых процессов в задачах со смешанными ограничениями / Е.В. Гончарова // АиТ. – 2002. – № 8. – С. 102-109.
9. *Goncharova E.* Improvement of Discrete Control Processes in Problems with Mixed Constraints // Autom. Remote Control, 2002. V. 63. No. 8. P. 1298-1304.
10. *Батурин, В.А.* Метод улучшения для дискретной управляемой системы с сетевой структурой / В.А. Батурин, А.А. Лемперт // УБС. Спец. вып. 30.1 «Сетевые модели в управлении». – М.: ИПУ РАН, 2010. – С. 11-21.
11. *Батурин, В.А.* Методы слабого улучшения в задаче оптимального управления на се-ти операторов / В.А. Батурин, А.А. Лемперт // Тр. междунар. конф. «Вычислительные и информационные технологии в науке и образовании». – Павлодар, 2006. – Т. 2. – С. 76-87.
12. *Бадмацыренова, С.Б.* Метод последовательного улучшения второго порядка для дискретных управляемых систем / С.Б. Бадмацыренова, В.А. Батурин // Изв. РАН. ТиСУ. – 2012. – № 4. – С. 14-25.
13. *Badmatsyrenova S.B., Baturin V.A.* Second-order successive improvement method for dis-crete control systems // Journal of Computer and Systems Sciences International, 2012. V. 51, No. 4, P. 488-499.
14. *Батурин, В.А.* Метод улучшения, основанный на приближенном представлении множества достижимости. Теорема о релаксации / В.А. Батурин, Е.В. Гончарова // АиТ. – 1999. – № 11. – С. 19-29.
15. *Baturin V., Goncharova E.* An Optimal Control Algorithm Based on Reachability Set Approximation and Linearization // Autom. Remote Control, 2002. V. 63. No. 7. P. 1043-1050.
16. *Квакернаак, Х.* Линейные оптимальные системы управления / Х. Квакернаак, Р. Сиван – М.: Мир. – 1977.
17. *Константинов, Г.Н.* Нормирование воздействий на динамические системы / Г.Н. Константинов. – Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та, 1983.
18. *Гурман, В.И.* Алгоритм улучшения, основанный на оценках областей достижимости / В.И. Гурман, В.А. Батурин. Деп. в ВИНИТИ. – № 651-85. – 1985.
19. *Гончарова, Е.В.* Итеративный метод решения дискретных задач оптимального управления / В.И. Гурман, Г.Н. Константинов // ЖВТ. 2003. – Т. 8. – С. 269-275.
20. *Гурман, В.И.* Множества достижимости управляемых систем. Связь с уравнением Беллмана / В.И. Гурман, Г.Н. Константинов. – Иркутск, 1981. – Деп. в ВИНИТИ 14.08.81. – № 4038-81.
21. *Лотов, А.В.* О понятии обобщенных множеств достижимости и их построении для линейной управляемой системы / А.В. Лотов // ДАН СССР. – 1980. – № 5. – С. 1081-1083.
22. *Pescvardi T., Arenda K.S.* Reachable sets for linear dynamic systems // Inform, and Control. 1971. V. 19. № 4. P. 319-344.
23. *Vinter R.* A characterization of the reachable set for nonlinear control systems // Siam J. Contr. and Optim. 1980. V. 18. No. 6. P. 599-610.
24. *Летов, А.М.* Аналитическое конструирование регуляторов, II / А.М. Летов // АиТ. – 1960. – Т. 21. – № 5. – С. 561-568.
25. *Беллман Р.* Динамическое программирование / Р. Беллман. – М.: Изд-во иностранной литературы, 1960.
26. *Куо, Б.* Теория и проектирование цифровых систем управления / Б. Куо. – М.: Машиностроение, 1986.
27. *Васильев, Ф.П.* Методы решения экстремальных задач / Ф.П. Васильев. – М.: Наука, 1981.

SUCCESSIVE APPROXIMATION METHOD BASED ON LOCAL APPROXIMATION OF THE REACHABLE SET FOR DISCRETE OPTIMAL CONTROL PROBLEMS

© 2023 V.A. Baturin, A.V. Daneev, V.N. Sizykh

Irkutsk State Transport University, Irkutsk, Russia

An improvement algorithm based on local approximations of the reachable set of a time-discrete optimal control problem is considered. Conditions are obtained that ensure the relaxation of the algorithm and the connection with the necessary optimality conditions.

Keywords: optimal control, method of successive approximations, local approximation of the reachable set, discrete problems.

DOI: 10.37313/1990-5378-2023-25-3-114-129

EDN: LKFKBB

REFERENCES

1. *Boltyanskij, V.G.* Optimal'noe upravlenie diskretnymi sistemami / V.G. Boltyanskij. – M.: Nauka, 1973.
2. *Gabasov R.* Osnovy dinamicheskogo programmirovaniya / R. Gabasov, F.M. Kirillova. – Minsk: Izd-vo BGU, 1975.
3. *Krotov V.F.* Metody i zadachi optimal'nogo upravleniya / V.F. Krotov, V.I. Gurman. – M.: Nauka, 1973.
4. *Propoj, A.I.* Elementy teorii optimal'nyh diskretnyh processov / A.I. Propoj. – M.: Nauka, 1973.
5. *Baturin, V.A.* Priblizhennye metody optimal'nogo upravleniya, osnovannye na principe rasshireniya / V.A. Baturin, D.E. Urbanovich. – Novosibirsk: Nauka, SO RAN, 1997.
6. *Gurman, V.I.* Princip rasshireniya v zadachah upravleniya / V.I. Gurman. – M.: Nauka, 1997.
7. *Baturin, V.A.* Metod uluchsheniya, osnovannyj na lokal'nyh approksimaciyah mnozhestva dostizhimosti, dlya diskretnyh upravlyaemyh sistem // Tr. XII Bajkal'skoj mezhdunar. konf. "Metody optimizacii i ih prilozheniya" / V.A. Baturin, E.V. Goncharova. – Irkutsk. 2001. – T. 2. – S. 68-72.
8. *Goncharova, E.V.* Ob uluchshenii diskretnyh upravlyaemyh processov v zadachah so sme-shannymi ogranicheniyami / E.V. Goncharova // AiT. – 2002. – № 8. – S. 102-109.
9. *Goncharova E.* Improvement of Discrete Control Processes in Problems with Mixed Constraints // Autom. Remote Control, 2002. V. 63. No. 8. P. 1298-1304.
10. *Baturin, V.A.* Metod uluchsheniya dlya diskretnoj upravlyaemoj sistemy s setevoj strukturoj / V.A. Baturin, A.A. Lempert // UBS. Spec. vyp. 30.1 "Setevye modeli v upravlenii". – M.: IPU RAN, 2010. – S. 11-21.
11. *Baturin, V.A.* Metody slabogo uluchsheniya v zadache optimal'nogo upravleniya na seti op-eratorov / V.A. Baturin, A.A. Lempert // Tr. mezhdunar. konf. «Vychislitel'nye i informacionnye tekhnologii v nauke i obrazovanii». – Pavlodar, 2006. – T. 2. – S. 76-87.
12. *Badmacyrenova, S.B.* Metod posledovatel'nogo uluchsheniya vtorogo poryadka dlya diskretnyh upravlyaemyh sistem / S.B. Badmacyrenova, V.A. Baturin // Izv. RAN. TiSU. – 2012. – № 4. – S. 14-25.
13. *Badmatsyrenova S.B., Baturin V.A.* Second-order successive improvement method for discrete control systems // Journal of Computer and Systems Sciences International, 2012. V. 51, No. 4, P. 488-499.
14. *Baturin, V.A.* Metod uluchsheniya, osnovannyj na priblizhennom predstavlenii mnozhestva dostizhimosti. Teorema o relaksacii / V.A. Baturin, E.B. Goncharova // AiT. – 1999. – № 11. – S. 19-29.
15. *Baturin V., Goncharova E.* An Optimal Control Algorithm Based on Reachability Set Approximation and Linearization // Autom. Remote Control, 2002. V. 63. No. 7. P. 1043-1050.
16. *Kvakernaak, X.* Linejnye optimal'nye sistemy upravleniya / X. Kvakernaak, P. Sivan – M.: Mir. – 1977.
17. *Konstantinov, G.N.* Normirovanie vozdejstvij na dinamicheskie sistemy / G.N. Konstantinov. – Irkutsk: Izd-vo Irkut. un-ta, 1983.
18. *Gurman, V.I.* Algoritm uluchsheniya, osnovannyj na ocenkah oblastej dostizhimosti / V.I. Gurman, V.A. Baturin. Dep. v VINITI. – № 651-85. – 1985.
19. *Goncharova, E.V.* Iterativnyj metod resheniya diskretnyh zadach optimal'nogo upravleniya / V.I. Gurman, G.N. Konstantinov // ZHVT. 2003. – T. 8. – S. 269-275.
20. *Gurman, V.I.* Mnozhestva dostizhimosti upravlyaemyh sistem. Svyaz' s uravneniem Bellmana / V.I. Gurman, G.N. Konstantinov. – Irkutsk, 1981. – Dep. v VINITI 14.08.81. – № 4038-81.
21. *Lotov, A.V.* O ponyatii obobshchennyh mnozhestv dostizhimosti i ih postroenii dlya linejnoj upravlyaemoj sistemy / A.V. Lotov // DAN SSSR. – 1980. – № 5. – S. 1081-1083.
22. *Pescvardi T., Arenda K.S.* Reachable sets for linear dynamic systems // Inform, and Control. 1971. V. 19. № 4. P. 319-344.
23. *Vinter R.* A characterization of the reachable set for nonlinear control systems // Siam J. Contr. and Optim. 1980. V. 18. No. 6. P. 599-610.
24. *Letov, A.M.* Analiticheskoe konstruirovanie regulyatorov, II / A.M. Letov // AiT. – 1960. – T. 21. – № 5. – S. 561-568.
25. *Bellman R.* Dinamicheskoe programmirovanie / R. Bellman. – M.: Izd-vo inostrannoj literatury, 1960.
26. *Kuo, B.* Teoriya i proektirovanie cifrovyh sistem upravleniya / B. Kuo. – M.: Mashinostroenie, 1986.
27. *Vasil'ev, F.P.* Metody resheniya ekstremal'nyh zadach / F.P. Vasil'ev. – M.: Nauka, 1981.

Vladimir Baturin, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Senior Research Fellow. E-mail: rozen@iss.ru
Aleksey Daneev, Doctor of Technical Sciences, Professor, Professor of the Department of Information Systems and Information Security. E-mail: daneev@mail.ru
Viktor Sizykh, Doctor of Technical Sciences, Professor, Professor of the Department of Automation of Production Processes. E-mail: sizykh_vn@mail.ru