

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАДАЧИ О СВОБОДНОМ РАСТЕКании ПЛАСТИЧЕСКОГО СЛОЯ, СОСТОЯЩЕГО ИЗ РАЗНЫХ СРЕД, В ПОСТАНОВКЕ МОДЕЛИ «ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ»

© 2023 Е. А. Яновская

Московский государственный технологический университет «СТАНКИН», г. Москва, Россия

Статья поступила в редакцию 15.08.2023

Исследуемый подход важен для практического применения, т.к. является основой многих базовых операций пластического деформирования, связанных с пластическим течением в тонком слое материала, деформируемого валками (продольная прокатка, вальцовка) или штампами (объемная и листовая штамповка), которые описываются пространственными математическими моделями с разнообразием параметров, определяющих реологию материала. На поверхностях контакта материала обработки с инструментом создаются давления, на порядок превышающие сдвиговые характеристики материала так, что в начальном приближении для описания свойств материала пластического слоя возможно использовать модель гидродинамической жидкости [1, 2, 3]. Как было показано ранее, практически вдоль всей контактной поверхности наблюдается проскальзывание, при котором поверхности контакта совпадают с поверхностями скольжения, а удельные силы трения на них максимальны [4] и равны пределу текучести материала на сдвиг [5, 6]. Следует отметить другую особенность протекания указанных процессов, определяющую требования к точности конечной поковки. Понятно, что большие контактные давления вызывают нормальные упругие перемещения рабочих поверхностей инструмента, соизмеримые с толщиной пластического слоя [7, 8]. Рассматриваем пластический слой в клиновидной области, составленный из материалов с разными механическими характеристиками. Слой свободно растекается между параллельно сближающимися жесткими шероховатыми плитами. Слой под действием в направлении толщины распределенной нагрузки со стороны инструмента беспрепятственно течет в направлении радиусов.

Ключевые слова: тонкий слой, стесненное течение, модель «идеальной жидкости».

DOI: 10.37313/1990-5378-2023-25-4-132-138

EDN: RGOMXP

ПОСТАНОВКА И РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Краевая задача течения тонкого слоя по плоским шероховатым поверхностям ставится следующим образом. Рассматриваем пластический слой в клиновидной области, составленный из материалов с разными механическими характеристиками. Положение прямолинейных границ, пересекающихся в начале выбранной неподвижной прямоугольной системы координат Oxy , задается начальными углами α_1 и α_2 соответственно (рис. 1). Предположим, что такой слой свободно растекается между параллельно сближающимися жесткими шероховатыми плитами. Слой под действием в направлении толщины распределенной нагрузки со стороны инструмента беспрепятственно течет в направлении радиусов. Подобная задача при условии симметричности пластической области в постановке математической модели «идеальной жидкости» решена в [5].

Выберем неподвижную систему координат Oxy , в которой в начальный момент времени $t = t_0$ указанная область задается углом $\beta_2 \geq 0$. При этом сами линейные границы растекающейся области в начальный момент заданы уравнениями прямых:

$$\begin{aligned} \Gamma_1: y &= k_1 x, \quad k_1 > 0, \\ \Gamma_2: y &= k_2 x, \quad k_2 \leq 0, \\ \Gamma_{12}: y &= k_0 x, \end{aligned}$$

где k_1, k_2, k_0 – коэффициенты определяются через известные углы α_1, α_2 и β_2 :

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \beta_2 &= -k_2; \\ \operatorname{tg}(\alpha_2 - \beta_2) &= k_0; \\ \operatorname{tg}[\alpha_1 + (\alpha_2 - \beta_2)] &= k_1. \end{aligned}$$

Система дифференциальных уравнений в частных производных краевой задачи течения пластического слоя на плоскости (в размерных величинах, $t \geq t_0$) состоит из двух уравнений квазистатического равновесия относительно неизвестного давления p на контакте (1) и (2) и условия несжимаемости (3):

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{2\tau_{sk}}{h_1} \cdot \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{2\tau_{sk}}{h_1} \cdot \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \quad (2)$$

Яновская Елена Александровна, кандидат технических наук, доцент кафедры прикладной математики.
E-mail: elena_yanovskaya@bc.ru

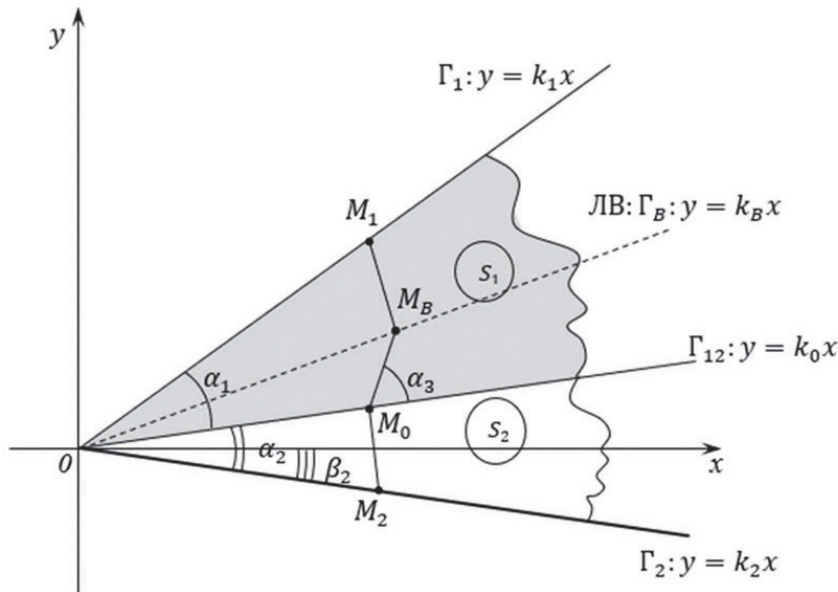


Рисунок 1. Схема пластической области в форме клина из материалов с разными механическими характеристиками:
 M_0, M_1, M_2 – точки, принадлежащие линейным границам;
 S_1, S_2 – области, занимаемые двумя различными по свойствам материалами

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{d\lambda}{dt} = 0. \tag{3}$$

Дополняет систему неизвестная граница раздела двух сред

$$\Gamma_{12}(y = \varphi_0(x, t); t > t_0),$$

которая в начальный момент задана уравнением

$$\varphi_0(x, t_0) = k_0x;$$

на этой границе давление выравняется

$$\begin{aligned} p_1 &= p_2; \\ \frac{\partial \varphi_0}{\partial t} + u \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} &= v. \end{aligned}$$

На неизвестных свободных границах

$$\Gamma_m(y = \varphi_m(x, t), t > t_0, m = 1, 2),$$

которые в начальный момент также известны

$$\begin{aligned} (\varphi_m(x, t_0) = k_mx): p &= 0; \\ \frac{\partial \varphi_m}{\partial t} + u \frac{\partial \varphi_m}{\partial x} &= v, \end{aligned}$$

здесь u, v – скорости течения;

$$\sigma_{sk} = \sqrt{3}\tau_{sk} \quad (k = 1, 2) -$$

предел текучести пластического материала в областях S_1 и S_2 соответственно, причем для определенности положим, что $\sigma_{s1} \leq \sigma_{s2}$; $h = h(t)$ – известный закон изменения толщины слоя; $\lambda(t) = \ln\left(\frac{h_0}{h(t)}\right)$ – степень деформации; $h_0 = h(t_0)$ – толщина слоя в начальный момент времени t_0 .

Примем за L_0 – характерное значение линейного размера слоя. Введем безразмерные величины:

$$\varepsilon = \frac{h_0}{L_0}; \quad \delta = \frac{\sigma_{s1}}{\sigma_{s2}}; \quad p_0 = \frac{\sigma_{s1}}{\varepsilon}; \quad v_0 = -\frac{\left(\frac{dh(t_0)}{dt}\right)}{\varepsilon}.$$

Обезразмерим величины в уравнениях задачи:

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} = -\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{1}{h} \frac{\bar{u}}{\sqrt{\bar{u}^2 + \bar{v}^2}}; \tag{4}$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} = -\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{1}{h} \frac{\bar{u}}{\sqrt{\bar{u}^2 + \bar{v}^2}}, \text{ в } S_1; \tag{5}$$

$$\delta \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} = -\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{1}{h} \frac{\bar{u}}{\sqrt{\bar{u}^2 + \bar{v}^2}}; \tag{6}$$

$$\delta \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} = -\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{1}{h} \frac{\bar{u}}{\sqrt{\bar{u}^2 + \bar{v}^2}}, \text{ в } S_2; \tag{7}$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} - \frac{d\lambda}{d\bar{t}} = 0, \text{ в } S_1 \cup S_2; \quad (8)$$

$$\bar{p}_1 = \bar{p}_2; \quad (9)$$

$$\frac{\partial \bar{\varphi}_0}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{\varphi}_0}{\partial \bar{x}} = \bar{v}, \text{ на } \Gamma_{12}; \quad (10)$$

$$p = 0; \quad (11)$$

$$\frac{\partial \bar{\varphi}_k}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{\varphi}_k}{\partial \bar{x}} = \bar{v}, \text{ на } \Gamma_k \ (k = 1, 2). \quad (12)$$

Задача решается в безразмерных величинах. Для удобства записи диакритические знаки в виде черты над безразмерными величинами в дальнейших рассуждениях опускаем. Как известно [1], внутри области течения существует линия раздела течения, образованная пересечением двух различных линий тока, и на которой $u^2 + v^2 = 0$. С другой стороны, при $h = h(x)$ линиями тока служат прямые, ортогональные к контуру свободно растекающегося пластического слоя. Пусть $M_0(x_0; y_0)$ некоторая точка на линии раздела двух сред Γ_{12} (см. рис.1). Для определенности положим, что:

$$\sigma_{S_1} \sin \alpha_1 \geq \sigma_{S_2} \sin \alpha_2. \quad (13)$$

Предположение (13) означает, что линия раздела течения в начальный момент времени $t = t_0$ располагается в области S_1 . Поэтому продолжим линию тока, исходящую из области S_2 , в область S_1 , отсчитывая от точки $M_0 \in \Gamma_{12}$. Для этого найдем угол преломления $\frac{\pi}{2} - \alpha_3$ линии тока в точке M_0 [5]:

$$\frac{dp(s)}{ds} = \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial p}{\partial y} \frac{dy}{ds} = \frac{2}{\sqrt{3}h\delta} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_2\right) = \frac{2}{\sqrt{3}h} \cos \alpha_3, \\ \delta \cos \alpha_3 = \sin \alpha_2, \quad (14)$$

где s – параметр длины дуги вдоль линии Γ_{12} . Формула (14) означает, что при пересечении линии раздела двух пластических сред линия тока преломляется, причем угол преломления увеличивается при прохождении в «менее плотную» среду (аналогия с оптикой). Из (14) следует, что все линии тока входят в область S_2 под постоянным углом к оси Ox . Теперь, определив линию тока, исходящую из точки $M_0 \in \Gamma_{12}$, можем найти на ней точку $M_B(x_B; y_B)$ ветвления течения из следующего условия:

$$\frac{2}{\sqrt{3}h\delta} (OM_0 \sin \alpha_2) + \frac{2}{\sqrt{3}h} (M_0 M_B) = \frac{2}{\sqrt{3}h} \frac{(k_1 x_B - y_B)}{\sqrt{1+k_1^2}}. \quad (15)$$

В (15) справа стоит выражение для контактного давления в точке M_B , найденного вдоль другой линии тока, исходящей от контура Γ_1 , причем величина:

$$s = \frac{|k_1 x_B - y_B|}{\sqrt{1+k_1^2}} = \frac{k_1 x_B - y_B}{\sqrt{1+k_1^2}},$$

есть расстояние от точки M_B до границы Γ_1 . Находим оставшиеся в (15) величины:

$$OM_0 = \sqrt{x^2 + y^2} = x_0 \sqrt{1+k_0^2}$$

Уравнение прямой $M_0 M_B$:

$$y - y_0 = \operatorname{tg}(\beta_0 + \alpha_3) \cdot (x - x_0), \quad (16)$$

где $\beta_0 \equiv \arctg k_0 \geq 0$.

Из (13) получаем:

$$k_5 \equiv \operatorname{tg}(\beta_0 + \alpha_3) = \frac{\operatorname{tg} \beta_0 + \operatorname{tg} \alpha_3}{1 - \operatorname{tg} \beta_0 \operatorname{tg} \alpha_3} = \frac{k_0 \sin \alpha_2 + \sqrt{\delta^2 - \sin^2 \alpha_2}}{\sin \alpha_2 - k_0 \sqrt{\delta^2 - \sin^2 \alpha_2}} \quad (17)$$

С другой стороны:

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \operatorname{tg}[(\alpha_2 - \beta_2) + \beta_2] = \frac{\operatorname{tg}(\alpha_2 - \beta_2) + \operatorname{tg} \beta_2}{1 - \operatorname{tg}(\alpha_2 - \beta_2) \operatorname{tg} \beta_2} = \frac{k_0 - k_2}{1 + k_0 k_2}; \\ \sin \alpha_2 = \frac{\sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha_2}}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_2}} = \frac{k_0 - k_2}{\sqrt{(1+k_0 k_2)^2 + (k_0 - k_2)^2}} > 0. \quad (18)$$

Подставим (18) в (17) и найдем k_5 в зависимости от k_0, k_2 и δ :

$$k_5 = \frac{k_0(k_0 - k_2) + \sqrt{\delta^2(1+k_0 k_2)^2 + \delta^2(k_0 - k_2)^2}}{(k_0 - k_2) - k_0 \sqrt{\delta^2(1+k_0 k_2)^2 + \delta^2(k_0 - k_2)^2}} \quad (19)$$

В частности, при $\delta = 1$ (т.е. пластическая среда - однородная) из (2.80) и (2.77) соответственно получаем:

$$k_5 = -\frac{1}{k_2}, \\ M_0 M_B = \sqrt{(y_B - y_0)^2 + (x_B - x_0)^2} = |x_B - x_0| \sqrt{1+k_5^2}, \quad (20)$$

Подставим (18), (19), (20) в (15):

$$x_B = x_0 \frac{f_1(k_1, k_2, k_0, \delta)}{f_2(k_1, k_2, k_0, \delta)}, \quad (21)$$

где

$$f_1 \equiv -\frac{1}{\delta} \sqrt{1+k_0^2} \sin \alpha_2 + \sqrt{1+k_5^2} + \frac{k_5-k_0}{\sqrt{1+k_1^2}} = -\frac{1}{\delta} \frac{\sqrt{1+k_0^2}(k_0-k_2)}{\sqrt{(1+k_0k_2)^2+(k_0-k_2)^2}} + \sqrt{1+k_5^2} + \frac{k_5-k_0}{\sqrt{1+k_1^2}};$$

$$f_2 \equiv \sqrt{1+k_5^2} - \frac{k_1-k_5}{\sqrt{1+k_1^2}}.$$

Как видно из (20), (21), линия ветвления (ЛВ) в момент $t = t_0$ есть прямая:

$$y_B = k_B x_B, k_B \equiv \frac{f_1 k_5 + f_2 (k_0 - k_5)}{f_1}. \quad (22)$$

В частности, при $\delta = 1$ формула (22) упрощается:

$$k_B = \frac{k_2 \sqrt{1+k_1^2} + k_1 \sqrt{1+k_2^2}}{\sqrt{1+k_1^2} + \sqrt{1+k_2^2}},$$

$$\arctg k_B - \arctg k_2 = \arctg k_1 - \arctg k_B = \frac{1}{2} (\arctg k_1 - \arctg k_2).$$

Последняя формула означает, что для однородного пластического слоя линия ветвления равно отстоит от линий свободных контуров Γ_1 и Γ_2 . Если дополнительно принять, что $k_2 = -k_1$, то получаем: $k_B = 0$, т.е. линия ветвления совпадает с осью Ox . Получим теперь зависимости для контактного давления и скорости течения в начальный момент. Рассмотрим сначала область S_{1B} , ограниченную линиями Γ_1 и Γ_B . Линия тока, проходящая через точку $M(x, y) \in S_{1B}$:

$$y - y_B = -\frac{1}{k_1} (x - x_B)$$

Последнее условие разрешается относительно x_B

$$x_B = \frac{k_1 y + x}{k_1 k_B + 1}.$$

Тогда,

$$p(x, y) = \frac{2}{\sqrt{3}h} \frac{(k_1 x - y)}{\sqrt{1+k_1^2}},$$

$$V(x, y) = \frac{d\lambda}{dt} |x_B - x| \sqrt{1 + \frac{1}{k_1^2}} = \frac{d\lambda}{dt} \frac{(x_B - x) \sqrt{1+k_1^2}}{k_1} = \frac{d\lambda}{dt} \frac{\sqrt{1+k_1^2}}{k_1 k_B + 1} (y - k_B x),$$

$$u = V \cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta_1\right) = -V \sin \beta_1 = -\frac{V k_1}{\sqrt{1+k_1^2}} = -\frac{d\lambda}{dt} (x_B - x) = -\frac{d\lambda}{dt} \frac{k_1 (y - k_B x)}{k_1 k_B + 1},$$

$$v = V \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta_1\right) = V \cos \beta_1 = \frac{v}{\sqrt{1+k_1^2}} = \frac{d\lambda}{dt} \frac{(x_B - x)}{k_1} = \frac{d\lambda}{dt} \frac{k_1 (y - k_B x)}{k_1 k_B + 1} \quad (23)$$

где $\beta_1 = \arctg k_1 > 0$.

Рассмотрим теперь область S_{B0} , ограниченную линиями Γ_B и Γ_{12} . Линия тока, проходящая через точку $M(x, y) \in S_{B0}$, имеет вид:

$$y - y_B = k_5 (x - x_B).$$

Разрешим последнее уравнение относительно x_B :

$$x_B = \frac{y - k_5 x}{k_B - k_5}.$$

Тогда,

$$p(x, y) = p(M_B) + \frac{2}{\sqrt{3}h} (M_B M) = \frac{2}{\sqrt{3}h} \frac{(k_1 x_B - y_B)}{\sqrt{1+k_1^2}} + \frac{2}{\sqrt{3}h} \sqrt{(y - y_B)^2 + (x - x_B)^2} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}h} \left(\frac{(y - k_5 x)}{k_B - k_5} \right) \frac{(k_1 - k_B)}{\sqrt{1+k_1^2}} + \frac{2}{\sqrt{3}h} \left(\frac{y - k_B x}{k_B - k_5} \right) \sqrt{1+k_5^2},$$

$$V(x, y) = \frac{d\lambda}{dt} (M_B M) = \frac{d\lambda}{dt} \sqrt{(x_B - x)^2 + (y_B - y)^2} = \frac{d\lambda}{dt} |x - x_B| \sqrt{1+k_5^2} = -\frac{d\lambda}{dt} (x_B - x) \sqrt{1+k_5^2} =$$

$$= -\frac{d\lambda}{dt} \sqrt{1+k_5^2} \left(\frac{y - k_B x}{k_B - k_5} \right), \quad (24)$$

$$u = -V \cos(\alpha_3 + \beta_0) = -\frac{V}{\sqrt{1+k_5^2}} = -\frac{d\lambda}{dt} (x_B - x) = -\frac{d\lambda}{dt} \frac{y - k_B x}{k_B - k_5},$$

$$v = -V \sin(\alpha_3 + \beta_0) = -\frac{V \cdot \operatorname{tg}(\alpha_3 + \beta_0)}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2(\alpha_3 + \beta_0)}} = -\frac{d\lambda}{dt} (x_B - x) k_5 = -\frac{d\lambda}{dt} \frac{(y - k_B x) k_5}{k_B - k_5}.$$

Рассмотрим, наконец, область S_{B2} , ограниченную линиями Γ_{12} и Γ_2 . Линия тока, проходящая через точку $M(x, y) \in S_{B2}$, имеет вид:

$$y = y_0 - \frac{1}{k_2} (x - x_0).$$

Разрешим последнее условие относительно x_0 :

$$x_0 = \frac{k_2 y + x}{k_2 k_0 + 1}.$$

Тогда,

$$p(x, y) = \frac{2}{\sqrt{3}h\delta} \frac{|k_2x - y|}{\sqrt{1 + k_2^2}} = \frac{2}{\sqrt{3}h\delta} \frac{y - k_2x}{\sqrt{1 + k_2^2}}$$

Согласно (14) и (18),

$$\begin{aligned} \cos\alpha_2 &= \frac{1}{\sqrt{1 + tg^2\alpha_2}} = \frac{1 + k_0k_2}{\sqrt{(1 + k_0k_2)^2 + (k_0 - k_2)^2}}, \\ \sin\alpha_3 &= \sqrt{1 - \cos^2\alpha_3} = \sqrt{1 - \frac{1}{\delta^2} \sin^2\alpha_2} = \frac{\sqrt{\delta^2(1 + k_0k_2)^2 + (\delta^2 - 1)(k_0 - k_2)^2}}{\delta\sqrt{(1 + k_0k_2)^2 + (k_0 - k_2)^2}}, \end{aligned}$$

В результате,

$$\begin{aligned} V(M_{02}) &= \frac{d\lambda}{dt} \sqrt{1 + k_2^2} \frac{k_0 - k_B}{k_B - k_5} \frac{\sqrt{\delta^2(1 + k_0k_2)^2 + (\delta^2 - 1)(k_0 - k_2)^2}}{\delta(k_0k_2 + 1)} x_0, \\ V(x, y) &= V(M_{02}) + \frac{d\lambda}{dt} (M_0M) = V(M_{02}) + \frac{d\lambda}{dt} \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = \\ &= V(M_{02}) + \frac{d\lambda}{dt} (x_0 - x) \frac{\sqrt{1 + k_2^2}}{-k_2} = \frac{d\lambda}{dt} \psi(x, y), \end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned} \psi &\equiv \frac{1}{k_2k_0 + 1} \left[\psi_1 - \sqrt{1 + k_2^2} (y - k_0x) \right], \\ \psi_1 &\equiv \sqrt{1 + k_2^2} \frac{k_0 - k_B}{k_B - k_5} \frac{\sqrt{\delta^2(1 + k_0k_2)^2 + (\delta^2 - 1)(k_0 - k_2)^2}}{\delta(k_0k_2 + 1)} (k_2y + x), \\ u(x, y) &= -V(M) \cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta_2\right) = -V(M) \sin\beta_2 = \frac{d\lambda}{dt} \frac{\psi \cdot k_2}{\sqrt{1 + k_2^2}}, \\ V(x, y) &= -V(M) \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta_2\right) = -V(M) \cos\beta_2 = -\frac{d\lambda}{dt} \frac{k_2}{\sqrt{1 + k_2^2}} \end{aligned} \tag{26}$$

Итак, нашли распределение p, u, v во всей области течения в начальный момент. Покажем, что линии $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_{12}$ остаются прямыми. Допустим, что они остаются прямыми, то есть их можно задать уравнениями:

$$\Gamma_1: y = k_1(t)x \tag{27}$$

$$\Gamma_2: y = k_2(t)x \tag{28}$$

$$\Gamma_{12}: y = k_0(t)x$$

Подставим (27) в кинематические условия (12):

$$\Gamma_1: \dot{k}_1x - k_1 \frac{d\lambda}{dt} \frac{k_1(y - k_Bx)}{k_1k_B + 1} = \frac{d\lambda}{dt} \frac{k_1 - k_B}{k_1k_B + 1},$$

в которой использованы формулы (24) относительно скоростей, а $y = k_1x$, или:

$$\begin{aligned} \Gamma_1: \dot{k}_1 - \frac{d\lambda}{dt} \frac{k_1^2(k_1 - k_B)}{k_1k_B + 1} &= \frac{d\lambda}{dt} \frac{k_1 - k_B}{k_1k_B + 1} \\ \Gamma_1: \frac{dk_1}{d\lambda} &= \frac{(k_1 - k_B)(1 + k_1^2)}{k_1k_B + 1}. \end{aligned} \tag{29}$$

Аналогично получаем дифференциальное уравнение относительно Γ_2 :

$$\Gamma_2: \dot{k}_2x + k_2 \frac{d\lambda}{dt} \frac{\psi \cdot k_2}{\sqrt{1 + k_2^2}} = -\frac{d\lambda}{dt} \frac{\psi}{\sqrt{1 + k_2^2}}$$

где ψ определяется из (26), в которой $y = k_2x$:

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \psi_0x, \\ \psi_0 &\equiv \frac{1}{k_2k_0 + 1} \left[\psi_2 - \sqrt{1 + k_2^2} (k_2 - k_0) \right], \\ \psi_2 &\equiv \sqrt{1 + k_2^2} \frac{k_0 - k_B}{k_B - k_5} \frac{\sqrt{\delta^2(1 + k_0k_2)^2 + (\delta^2 - 1)(k_0 - k_2)^2}}{\delta(k_2k_0 + 1)} (1 + k_2^2) \end{aligned}$$

или

$$\Gamma_2: \frac{dk_2}{d\lambda} = -\psi_0 \sqrt{1 + k_2^2} \tag{30}$$

В частности, при $\delta = 1$ и $k_2 = -k_1$ формулы (29) и (30) упрощаются:

$$\begin{aligned} \Gamma_1: \frac{dk_1}{d\lambda} &= k_1(1 + k_1^2), \\ \Gamma_2: \frac{dk_2}{d\lambda} &= k_2(1 + k_2^2), \psi_0 = -k_2 \sqrt{1 + k_2^2}, \end{aligned}$$

т.е. получили известное дифференциальное уравнение задачи о растекании однородного пластического слоя, занимающей область формы клина.

И, наконец, третье дифференциальное уравнение (2.71) относительно Γ_{12} :

$$\Gamma_{12}: \dot{k}_0x - k_0 \frac{d\lambda}{dt} \frac{y - k_Bx}{k_B - k_5} = \frac{d\lambda}{dt} \frac{(y - k_Bx)k_5}{k_B - k_5},$$

где использованы формулы (2.117) для скоростей, в которых $y = k_0x$. Или

$$\Gamma_{12}: \frac{dk_0}{d\lambda} = \frac{(k_0 - k_B)(k_0 - k_5)}{k_B - k_5}.$$

Система нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка (1), (2), (3) в общем случае решается численными методами. В результате получаем законы изменения границ пластических областей в процессе растекания.

Таким образом, представлено в полном виде точное решение несимметричной задачи о растекании пластического слоя, составленного из двух клиньев, в математической модели «идеальной жидкости», причем:

- 1) Показано, что границы этих клиньев остаются прямыми в процессе растекания. Выведены уравнения для эволюции их границ.
- 2) Установлено, что линия ветвления течения остается прямой в процессе растекания. Выведены формулы для нахождения линии ветвления течения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Георгиевский, Д.В. Избранные задачи механики сплошной среды / Д.В. Георгиевский. – М.: ЛЕНАНД, 2018. – 560 с.
2. Ильюшин, А.А. Труды (1946-1966). Т. 2. Пластичность / Составители Е.А. Ильюшина, М.Р. Короткина. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 480 с.
3. Кийко, И.А. О форме пластического слоя, сжимаемого параллельными плоскостями / И.А. Кийко // Прикладная математика и механика. – 2011. – Т. 75. – Вып. 1. – С. 15-26.
4. Кадымов, В.А. Контактная задача о несвободном растекании пластического слоя на плоскости: эксперимент и теория / В.А. Кадымов, Е.Н. Сосенушкин, Н.А. Белов // Сб. науч. трудов Упругость и неупругость. – М.: МГУ, 2016. – С.180–185.
5. Белов, Н.А. О краевой задаче течения пластического слоя между сближающимися жесткими плитами / Н.А. Белов, В.А. Кадымов // Изв. РАН. МТТ. – 2011. – №1. – С. 46–58.
6. Сосенушкин, Е.Н. Механика выдавливания алюминиевого сплава при штамповке поковки с продольными рёбрами / Е.Н. Сосенушкин, В.А. Кадымов, Е.А. Яновская, Т.В. Гуреева // Цветные металлы. – 2019. – №3. – С.69–75.
7. Кадымов, В.А. Некоторые точные решения эволюционного уравнения растекания пластического слоя на плоскости / В.А. Кадымов, Е.Н. Сосенушкин, Е.А. Яновская // Вестник Московского ун-та. Сер.1. Математика, механика. – 2016. – №3. – С.61–65.
8. ГОСТ 3778-98 Свинец. Технические условия. – Минск: ИПК Издательство стандартов, 2003. – 8 с.

SIMULATION AND COMPARISON OF THE RESULTS OF THE EXACT ANALYTICAL SOLUTION OF THE BOUNDARY PROBLEM OF A FLOW IN A THIN LAYER WITH EXPERIMENTAL DATA

© 2023 E. A. Yanovskaya

Moscow State Technological University "STANKIN", Moscow, Russia

The approach under study is important for practical application, since is the basis of many basic plastic deformation operations associated with plastic flow in a thin layer of material deformed by rolls (longitudinal rolling, rolling) or dies (volumetric and sheet stamping), which are described by spatial mathematical models with a variety of parameters that determine the rheology of the material. Pressures are created on the contact surfaces of the processing material with the tool, which exceed the shear characteristics of the material by an order of magnitude, so that, in the initial approximation, it is possible to use the model of a hydrodynamic fluid to describe the properties of the material of the plastic layer [1, 2, 3]. As was shown earlier, sliding is observed almost along the entire contact surface, in which the contact surfaces coincide with the sliding surfaces, and the specific friction forces on them are maximum [4] and equal to the shear yield strength of the material [5, 6]. It should be noted another feature of the course of these processes, which determines the requirements for the accuracy of the final forging. It is clear that high contact pressures cause normal elastic displacements of the working surfaces of the tool, commensurate with the thickness of the plastic layer [7, 8]. We consider a plastic layer in the wedge-shaped region, composed of materials with different mechanical characteristics. the layer spreads freely between the rigid rough slabs converging in parallel. The layer under the action in the direction of the thickness of the distributed load from the side of the tool flows freely in the direction of the radii.

Keywords: thin layer, constrained flow, "ideal fluid" model.

DOI: 10.37313/1990-5378-2023-25-4-132-138

EDN: RGOMXP

REFERENCES

1. *Georgievskij, D.V.* Izbrannye zadachi mekhaniki sploshnoj sredy / D.V. Georgievskij. – M.: LENAND, 2018. – 560 s.
2. *Il'yushin, A.A.* Trudy (1946-1966). T. 2. Plastichnost' / Sostaviteli E.A. Il'yushina, M.R. Korotkina. – M.: FIZMATLIT, 2004. – 480 s.
3. *Kijko, I.A.* O forme plasticheskogo sloya, szhimaemogo parallel'nymi ploskostyami/ I.A. Kijko // Prikladnaya matematika i mekhanika. – 2011. – T. 75. – Vyp. 1. – S. 15-26.
4. *Kadymov, V.A.* Kontaktnaya zadacha o nesvobodnom rastekanii plasticheskogo sloya na ploskosti: eksperiment i teoriya / V.A. Kadymov, E.N. Sosenushkin, N.A. Belov // Sb. nauch. trudov Uprugost' i neuprugost'. – M.: MGU, 2016. – S.180–185.
5. *Belov, N.A.* O kraevoj zadache techeniya plasticheskogosloyamezhdusblzhayushchimisya zhestkimi plitami / N.A. Belov, V.A. Kadymov// Izv. RAN. MTT. – 2011. – №1. – S. 46–58.
6. *Sosenushkin, E.N.* Mekhanika vydavlivaniya alyuminievogo splava pri shtampovke pokovki s prodol'nymi ryobrami / E.N. Sosenushkin, V.A. Kadymov, E.A. YAnovskaya, T.V. Gureeva // Cvetnye metally. – 2019. – №3. – S.69–75.
7. *Kadymov, V.A.* Nekotorye tochnye resheniya evolyucionnogo uravneniya rastekaniya plasticheskogo sloya na ploskosti/ V.A. Kadymov, E.N. Sosenushkin, E.A. YAnovskaya // Vestnik Moskovskogo un-ta. Ser.1. Matematika, mekhanika. – 2016. – №3. – S.61–65.
8. GOST 3778-98 Svinec. Tekhnicheskie usloviya. – Minsk: IPK Izdatel'stvo standartov, 2003. – 8 s.