УДК 51-72 : 539.214: 539.374

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК В НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧАХ ПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ ТОНКОГО СЛОЯ ПО ПЛОСКОСТЯМ

© 2023 Е. А. Яновская

Московский государственный технологический университет «СТАНКИН», г. Москва, Россия

Статья поступила в редакцию 15.08.2023

В основу расчетов положена предложенная Ильюшиным А.А. [1] теория течения в тонком пластическом слое, заключенном между двумя сближающимися по заданному закону сближающимися поверхностями тел инструмента. На поверхностях контакта принимается классический закон течения Л. Прандтля [2]. Для решения предложенной задачи используется известная краевая задача в постановке «идеальной жидкости». Эта постановка описывается нелинейными дифференциальными уравнениями в частных производных первого порядка относительно контактного давления и компонент вектора скорости течения вдоль плоскости течения [3, 4]. В общем случае искомые величины представляют собой сложные функции, зависящие от формы очага деформации, величины контактного давления в рассматриваемой точке поверхности контакта, наличия, состава и степени смазки, величины шероховатости контактирующих поверхностей и т. д. [5, 6]. В работе предлагается метод решения задач течения пластических слоев в новой постановке. Проведен анализ полученного результата. На основе метода характеристик решена задачи о течении пластического слоя материала между наклонными плитами в фиксированной круговой области, когда ее граница образована пазами в одном из тел инструмента, куда свободно затекает пластический материал. С помощью предложенного решения можно построить кинематику течения.

Ключевые слова: тонкий слой, давление на контакте; силы деформирования; кинематические параметры.

DOI: 10.37313/1990-5378-2023-25-4-139-144

EDN: RQGXCH

ВВЕДЕНИЕ

В основу расчетов положена предложенная Ильюшиным А.А. [1] теория течения в тонком пластическом слое, заключенном между двумя сближающимися по заданному закону поверхностями тел инструмента в предположениях, что

- материал пластического слоя идеально-пластический,
- материал слоя объемно-несжимаемый,
- упругими деформациями тел инструмента пренебрегаем,
- на поверхностях контакта принимается классический закон течения Л. Прандтля [2].

ПОСТАНОВКА КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Используется краевая задача в постановке «идеальной жидкости». Эта постановка описывается нелинейными дифференциальными уравнениями в частных производных первого порядка относительно контактного давления и компонент вектора скорости течения вдоль плоскости течения [3, 4]:

$$grad p = -\frac{2\tau_s}{h}\frac{u}{|\vec{v}|}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{h}\frac{dh}{dt} = 0. \tag{2}$$

Яновская Елена Александровна, кандидат технических наук, доцент кафедры прикладной математики. E-mail: elena_yanovskaya@bc.ru

Единственное краевое условие на контуре растекающегося пластического слоя

$$p\Big|_{\partial S_1} = \sigma_s. \tag{3}$$

На свободной части контура

$$p\Big|_{\partial S_2} = 2\sigma_s. \tag{4}$$

На границе области, образованной пазами в одном из тел инструмента, куда свободно затекает материал слоя:

$$p\Big|_{\partial S_3} = p_\Gamma(\mu). \tag{5}$$

В общем случае затрудненного растекания, где $p_\Gamma(\mu)$ – заданная функция от параметра μ на границе.

Рассматривается краевая задача течения в тонком пластическом слое в постановке (1)-(5) с условием на границе слоя

$$p(\alpha,\beta,t)\Big|_{\partial S_t} = k\sigma_s \ (k = 1{,}2). \tag{6}$$

Причем принимается, что упругими деформациями воздействующих тел (инструмента) можно пренебречь ($h(\alpha,\beta,t) \equiv h_1$).

При заданном законе сближения внешних тел, то есть при известной функции ($h(\alpha,\beta,t) \equiv h_1$) и условии на границе слоя в виде (6) в задаче требуется для всех $t > t_0$ определить законы распределения контактного давления $p(\alpha,\beta,t)$, скоростей $u(\alpha,\beta,t)$, $v(\alpha,\beta,t)$, меру накопленной деформации $\lambda(t) = ln\left(\frac{h_0}{h(t)}\right)$, общую силу в заданном направлении [5]:

$$P_{\text{общ}} = \iint_S (p\vec{n}\,\vec{v})ds, \qquad (7)$$

а также, форму растекающейся области $s_t = s(\alpha, \beta, t)$, занятой пластическим материалом, по известной начальной области $s_0 = s(\alpha, \beta, t_0)$ на геометрически неизменной основной поверхности.

В общем случае μ_i $(0 \le \mu_i \le 1)$ представляют собой сложные функции, зависящие от формы очага деформации, величины контактного давления в рассматриваемой точке поверхности контакта, наличия, состава и степени смазки, величины шероховатости контактирующих поверхностей и т. д. [6] При наличии сухого трения (без смазки) в процессах течения тонких пластических слоев можно положить $\mu_1 = \mu_2 = 1$, что экспериментально подтверждается в [7, 8].

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Ниже предлагается метод решения задач течения пластических слоев в постановке (1), (2) с граничным условием (3) – (5). Уравнения краевой задачи (1), (2) запишем в виде [9]:

$$\frac{\partial p}{A\partial\alpha} = -\frac{2\tau_s}{h}\cdot\frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}} \qquad (8)$$

$$\frac{\partial p}{B\partial\beta} = -\frac{2\tau_s}{h}\cdot\frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}} \qquad (9)$$

Из векторных уравнений (8), (9) следует, что линии уровня $p(\alpha, \beta) = const$ ортогональны линиям тока

$$\frac{Ad\alpha}{ds} = -\frac{u}{V}, \frac{Bd\beta}{ds} = -\frac{v}{V};$$

т. е. направление вектора скорости течения совпадает с направлением вектора $gradp$. Это обстоятельство позволяет перейти от системы (8), (9) к эквивалентной системе двух дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка относительно $p(\alpha, \beta, t)$ и модуля вектора скорости V:

$$grad^2 p = \frac{4\tau_s^2}{h^2(\alpha,\beta,t)}, \qquad (10)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} - \frac{1}{AB}\frac{\partial(hBVcos\gamma)}{\partial\alpha} - \frac{1}{AB}\frac{\partial(hAVsin\gamma)}{\partial\beta} = 0, \qquad (11)$$

где $\vec{V} = -V(cos\gamma\vec{\imath} + sin\gamma\vec{\jmath})$; $\gamma = \gamma(\alpha, \beta, t)$ – угол между касательной к линии тока в рассматриваемой точке области течения и осью α. В уравнении (10) для удобства записи $\mu_1 = \mu_2 = 1$, хотя предлагаемый ниже метод остается верным для любой пары допустимых значений μ_1, μ_2. Решаем уравнение (10):

$$F(\alpha, \beta, P, p, q) \equiv \left(\frac{p}{A}\right)^2 + \left(\frac{q}{B}\right)^2 - \Omega^2(\alpha, \beta) = 0 \qquad (12)$$

где

$$\Omega(\alpha, \beta) = \frac{2\tau_s}{h} > 0, p = \frac{\partial P}{\partial\alpha}, q = \frac{\partial P}{\partial\beta},$$

а t, как независимый параметр, пока опускаем. Для нелинейного уравнения в частных производных первого порядка (12) каждая совокупность функций

$$\alpha = \alpha(S'), \beta = \beta(S'), P = P(S'), p = p(S'), q = q(S'), \qquad (13)$$

удовлетворяющая системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d\alpha}{dS'} = F_p, \frac{d\beta}{dS'} = F_q, \frac{dP}{dS'} = pF_p + qF_q, \qquad (14)$$

$$\frac{dp}{dS'} = -(pF_\rho + F_\alpha), \frac{dq}{dS'} = -(qF_\rho + F_\beta)$$

описывает вместе с уравнением (9) характеристическую полосу.

Выберем вдоль характеристической полосы вместо параметра S' вдоль характеристической полосы S, являющийся длиной дуги вдоль носителя характеристик $\alpha = \alpha(S), \beta = \beta(S)$, т.е. согласно (14)

$$dS = \sqrt{A^2 d\alpha^2 + B^2 d\beta^2} = \sqrt{A^2 {F_p}^2 + B^2 {F_q}^2}dS'. \qquad (15)$$

В нашем случае характеристическая система (14) имеет вид

$$\begin{cases} \frac{d\alpha}{ds} = \frac{1}{A^2}\frac{p}{\Omega}, \frac{d\beta}{ds} = \frac{1}{B^2}\frac{q}{\Omega}, \frac{dP}{ds} = \Omega \\ \frac{dp}{ds} = \frac{p^2}{\Omega A^3}A_\alpha + \frac{q^2}{\Omega B^3}B_\alpha + \Omega_\alpha \\ \frac{dq}{ds} = \frac{p^2}{\Omega A^3}A_\beta + \frac{q^2}{\Omega B^3}B_\beta + \Omega_\beta \end{cases} \qquad (16)$$

АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ И ФОРМУЛИРОВАНИЕ ТЕОРЕМ

Задача (16) – это задача типа Коши с соответствующими граничными условиями на контуре области s_t. Решения системы (16), удовлетворяющие (12), называют характеристической полосой, а несущую эту полосу кривую $(\alpha(s), \beta(s), P(s))$ - характеристической кривой. Можно установить связь между решениями (12) и (16) и показать эквивалентность их интегрирования при выполнении определенных условий, для чего будем использовать известные теоремы из теории дифференциальных уравнений в частных производных [10].

Теорема 1. Если характеристическая полоса имеет общий элемент (т. е. (α, β, P, p, q) с интегральной поверхностью $P = P(\alpha, \beta)$, то эта полоса целиком принадлежит интегральной поверхности.

Теорема 2. Пусть дана пространственная кривая C:

$$\alpha = \alpha(\mu), \beta = \beta(\mu), P = P(\mu),$$

которую можно дополнить функциями $p = p(\mu), q = q(\mu)$, до начальной полосы

$$C_1: \alpha = \alpha(\mu), \beta = \beta(\mu), P = P(\mu), p = p(\mu), q = q(\mu),$$

где C_1 удовлетворяет соотношению полосы

$$P'_\mu = p\alpha'_\mu + q\beta'_\mu \neq 0 \tag{17}$$

и уравнению

$$F(\alpha, \beta, P, p, q) = 0 \tag{18}$$

или вдоль полосы C_1:

$$\Delta \equiv F_p\beta'_\mu - F_q\alpha'_\mu \neq 0, \tag{19}$$

то в окрестности C_1существует одна и только одна интегральная поверхность, проходящая через эту полосу.

Выберем теперь в качестве пространственной кривой $C\big(\alpha(\mu), \beta(\mu), P(\mu)\big)$ регулярную часть контура ∂S_t области течения в рассматриваемый момент времени $\alpha(\mu), \beta(\mu) \in C^2$,

$$\left(\alpha'_\mu\right)^2 + \left(\beta'_\mu\right)^2 \neq 0 \text{ и положим на ней } P(\mu) = k\sigma_s.$$

Определим далее $p(\mu), q(\mu)$ так, чтобы выполнялись условия (17) – (19). Тогда в окрестности гладких точек контура области течения все условия теоремы 2 выполнены, т. е. существует единственная интегральная поверхность $P = P(\alpha, \beta)$, проходящая через выбранную часть контура. С другой стороны, задача Коши для системы (16) при выполнении условий типа Липшица для правых частей α, β, P, p, q имеет единственную характеристическую полосу, которая в свою очередь имеет общий элемент (в точках контура) с интегральной поверхностью. А значит по теореме 1 решения (16) и (12) совпадают.

Легко установить, что носители характеристик $\alpha(s), \beta(s)$ системы (16) совпадают с линиями тока, и система (16) оказывается эквивалентной системе четырех обыкновенных дифференциальных уравнений относительно

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{cos\gamma}{A}, \frac{d\beta}{ds} = \frac{cos\gamma}{B}, \frac{dP}{ds} = \Omega, \tag{20}$$

$$\frac{d\gamma}{ds} = \frac{1}{\Omega}\left(-\frac{\Omega_\alpha}{A}sin\gamma + \frac{\Omega_\alpha}{B}cos\gamma\right) + \frac{1}{AB}\left(A_\beta cos\gamma - B_\alpha sin\gamma\right).$$

Учитывая, что вдоль характеристик системы (20)

$$\frac{dP}{dS} = \Omega > 0,$$

последнюю систему можем представить в эквивалентной форме:

$$\frac{d\alpha}{dP} = \frac{cos\gamma}{A\Omega}, \frac{d\beta}{dP} = \frac{sin\gamma}{B\Omega}, \frac{dS}{dP} = \frac{1}{\Omega},$$

$$\frac{d\gamma}{dP} = \frac{1}{\Omega^2}\left(-\frac{\Omega_\alpha}{A}sin\gamma + \frac{\Omega_\alpha}{B}cos\gamma\right) + \frac{1}{AB\Omega}\left(A_\beta cos\gamma - B_\alpha sin\gamma\right). \tag{21}$$

Решения системы (20) или (21) с граничными условиями в точках контура области определяют риманову поверхность (α, β, P) из которой согласно принципу единственности давления (точнее, принципа минимума мощности внешних сил [11], который при заданном законе сближения внешних тел $h = h(\alpha, \beta, t)$ совпадает с минимумом внешних сил) оставляем покрытие области из частей характеристических кривых, заключенных между границей контура области и ребром (т. е. линией, составленной из точек пересечения, по крайней мере, двух разных характеристических кривых), и соответствующих минимальным значениям контактного давления.

Другие же части этой многолистной поверхности (продолжения характеристических кривых) физически не реализуются. Для решения таких задач в литературе известны как точные, так и численные (приближенные) методы, например, метод Рунге-Кутта [12].

Перейдем теперь к интегрированию уравнения (11) для определения кинематики течения. Перепишем это уравнение в эквивалентной форме:

$$\frac{\partial W}{A\partial\alpha}cos\gamma + \frac{\partial W}{B\partial\beta}sin\gamma + W\Psi + \overline{\omega} = 0$$

или

$$\frac{\partial W}{\partial s} = -W\Psi - \overline{\omega}, \tag{22}$$

где

$$W(s) = h\big(\alpha(s), \beta(s)\big)V(s), \overline{\omega}(s) = -\frac{\partial h}{\partial t},$$

$$\Psi = \frac{1}{AB}\left[\frac{\partial(Bcos\gamma)}{\partial\alpha} + \frac{\partial(Asin\gamma)}{\partial\beta}\right].$$

Если теперь сможем вычислить каким-то способом значения функции Ψ вдоль носителей характеристик $\alpha(S), \beta(S)$ (т. е. знать зависимость $\Psi = \Psi(S)$, то интегрирование (22) не составит большого труда – оно будет неоднородным линейным обыкновенным дифференциальным уравнением. Имеет место следующее представление:

Теорема 3.

$$\Psi = -\frac{1}{R(S)} + \frac{1}{R_\beta}cos\gamma + \frac{1}{R_\alpha}sin\gamma, \tag{23}$$

где

$$R_\alpha = \left(\frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta}\right)^{-1}, R_\beta = \left(\frac{1}{AB}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\right)^{-1}$$

- касательные радиусы кривизны линий α, β на основной поверхности,

$$\frac{1}{R(s)} = \chi(s) = \frac{\partial\gamma}{A\partial\alpha}sin\gamma + \frac{\partial\gamma}{B\partial\beta}cos\gamma = \frac{\partial\gamma}{\partial\eta}$$

- касательная (геодезическая) кривизна линий уравнений $P(\alpha, \beta) = const$ в рассматриваемой точке области течения.

В некоторых частных задачах течения тонких пластических слоев величина радиуса кривизны $R = R(s)$ линии уровня находится точно (течение плоских пластических слоев постоянной толщины $h = h(t)$, когда линии тока являются прямыми, ортогональными к контуру области), для Ψ получаем выражение, совпадающее с полученным в работе [13]:

$$\Psi = -\frac{1}{R(s) - s + s_0},$$

где $R(s)$ – радиус кривизны начального уровня (контура области). Считая теперь $\Psi = \Psi(S)$ известной функцией, проинтегрируем уравнение (23)

$$W(s) = h\big(\alpha(s), \beta(s)\big)V(s) = \bar{A}\mathcal{J}_1(s) - \mathcal{J}_2(s), \tag{24}$$

где

$$\mathcal{J}_1(S) = e^{-\int_{s_0}^{s}\Psi(s')dSs'}, \mathcal{J}_2(S) = \int_{s_0}^{s}\varpi(s")\,e^{-\int_{s"}^{s}\Psi(s')ds'}ds'',$$

а для определения постоянной интегрирования Ā имеем условие ветвления течения $W\big(s = s_{\text{ребра}}\big) = 0$ в неизвестных, но определяемых в ходе решения системы (16) точках следа ребра поверхности давления. Решаем исходную задачу следующим образом. Будем интегрировать системы (16) с начальными условиями в точках контура области (известно [14], что угловые точки контура принадлежат следу ребра давлений), представляющего линию начального уровня, с одновременным вычислением двух квадратур $\mathcal{J}_1\big(s(P)\big), \mathcal{J}_2\big(s(P)\big)$. Задавая шаг ΔP, будем строить поточечно очередную линию уровня и определять на ней значения $\mathcal{J}_1\big(s(P)\big), \mathcal{J}_2\big(s(P)\big)$. Продолжаем этот процесс до тех пор, пока не покроем всю область ортогональной сеткой линий уровня и линий тока, определив тем самым след ребра поверхности давлений (как линию стыковок отдельных характеристик) и значения $\mathcal{J}_1(P), \mathcal{J}_2(P)$, т. е. установив кинематику течения. Таким образом, в каждый фиксированный момент времени знаем положение контура ∂s_t области течения и нормальную к ней компоненту вектора скорости течения.

$$V(s_0) = \frac{1}{h(s_0)}[\bar{A}\mathcal{J}_1(s_0) - \mathcal{J}_2(s_0)],$$

где

$$\bar{A} = \frac{\mathcal{J}_2\big(s_{\text{ребра}}\big)}{\mathcal{J}_1\big(s_{\text{ребра}}\big)}.$$

Это означает, что можно определять форму контура свободно растекающейся области в момент $t + dt$. Если граница области является пазом, куда свободно затекает металл, то можно установить расход металла Vh и тем самым высоту затекшего в пазы ребра.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе метода характеристик решен ряд нестационарных задач пластического течения тонких слоев. Ограничимся лишь решением задачи о течении пластического слоя материала между наклонными плитами в фиксированной круговой области, когда ее граница образована пазами в одном из тел инструмента, куда свободно затекает пластический материал:

$$s_t \equiv s_0: x_0^2 + y_0^2 \leq R^2, h(x,t) = h_0(t) + \alpha_1(t)x.$$

Эта задача частично (точнее, лишь относительно силовых характеристик течения) решена в [15]. Новым в нашем решении будет построение кинематики течения. Как известно, все линии тока собираются в одной точке $\left(x_\rho(t), 0\right)$ и представляют собой эллиптический пучок окружностей; линии уровня изобразятся гиперболическим пучком окружностей. Ребро вырождается в единственную точку:

$$x_\rho(t) = \frac{\sqrt{h_0^2(t) - \alpha_1^2(t)R^2} - h_0}{\alpha_1(t)}.$$

Интегралы $\mathcal{J}_1\big(s(x)\big), \mathcal{J}_2\big(s(x)\big)$ для определения скоростей вдоль известных линий тока берутся точно; для линии тока, исходящей из точки контура $M_0(x_0 > 0, y_0 > 0\,)$, они имеют вид:

$$\mathcal{J}_1\big(s(x)\big) = \frac{y_0}{y(x)}, \mathcal{J}_2\big(s(x)\big) = \frac{1}{y(x)}\int_{x_0}^{x}\left(\dot{h}_0 + \dot{\alpha}x\right) y(x)\sqrt{1 + \left(y'(x)\right)^2}dx,$$

где

$$y(x,t) = y_0 + \frac{h_0(t) + \alpha_1(t)x_0}{\alpha_1(t)} \cdot \frac{x_0}{y_0} - \frac{R\left(h_0(t) + \alpha_1(t)x_0\right)}{\alpha_1(t)y_0}\left[1 - \frac{y_0^2}{(h_0(t) + \alpha_1(t)x_0)^2R^2} \cdot (h_0(t) + \alpha_1(t)x_0)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

- траектория движения.

Тогда

$$V(x) = \frac{1}{h(x)}\left(\bar{A}\mathcal{J}_1(x) - \mathcal{J}_2(x)\right),$$

при

$$\bar{A} = \frac{1}{y_0}\int_{x_0}^{x_p(t)}\left(\frac{dh_0(t)}{dt} + \frac{d\alpha_1(t)}{dt}\right) y(x)\sqrt{1 + \left(y'(x)\right)^2}dx.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *A.A. Ilyushin* / Proceedings (1946 - 1966). T.2. Plasticity / Compiled by E.A. Ilyushin, M.R. Korotkin. FIZMATLIT, Moscow, 2004.
2. L.Prandtl/ Proc. Ist. Int. Congr. App. Mech., Delft, 43. 1924.
3. *E.N. Sosenushkin, V.A. Kadymov, E.A. Yanovskaya, A.A. Arkhipov, T.V. Gureeva, D.S. Gusev, M.V. Prokin.* Development of the theory of flow of a plastically deformable layer, Bulletin of the Tula State University. Technical science. 5 (2019) 131-138.
4. *E.N. Sosenushkin, V.A. Kadymov, E.A. Yanovskaya, T.V. Gureeva.* Aluminum alloy extrusion mechanics when forging a forging with longitudinal ribs, Non-ferrous metals. 3 (2019) 58–64.
5. *V.A. Kadymov, E.N. Sosenushkin, E.A. Yanovskaya*. Contact Problems of Plastic Flow in a Thin Layer: Theory, Analysis of Solutions, and Applications, Journal of Machinery Manufacture and Reliability. 51, 3 (2022) 206-215.
6. *I.M. Volodin.* Modeling of hot forging processes, Mashinostroenie-1, Moscow, 2006.
7. *V.B. Mamaev, M.I. Pervov.* Consideration of contact friction forces at die forging, Vestnik Mashinostroenya. 3 (2016) 74-78.
8. *I.A. Kiiko.* Anisotropy in the flow processes of a thin plastic layer, J / Appl. Math. Mech.,70, 2 (2006) 311-317.
9. *D.V. Georgievskii.* The Prandtl problem for a plastic layer weakly inhomogeneous with respect to the yield strength, Mech. Solids. 41, 1 (2006) 35-46.
10. *A.D. Polyanin, V.F. Zaitsev.* Handbook of Nonlinear Equations of Mathematical Physics, FIZMATLIT, Moscow, 2002.
11. *V.M. Greshnov.* Physical and mathematical theory of large irreversible deformations, Fizmatlit, Moscov, 2018.
12. *G. Korn, T. Korn*. Handbook of Mathematics for Researchers and Engineers, Nauka, Moscow, 1970. [13] D.E.R. Godfrey, Theoretical elasticity and plasticity for engineers, Thames and Hudson, London, 1969.
13. *K.N. Solomonov, N.I. Fedorinin, L.I. Tishchuk*. Methodology for constructing metal flow lines in the processes of upsetting flat billets, Bulletin of Scientific and Technical Development. 2 (102) 2016 (36-55).
14. *V.A. Kadymov, E.N. Sosenushkin, E.A. Yanovskaya.* Exact Solutions to an Evolution Equation of Plastic Layer Flow on a Plane, Moscow University Mechanics Bulletin. Allerton Press. Inc. 71 (3) (2016) 69-72.
15. ГОСТ 3778-98 Свинец. Технические условия. – Минск: ИПК Издательство стандартов, 2003. – 8 с.

USE OF CHARACTERISTICS IN NON-STATIONARY PROBLEMS OF PLASTIC FLOW OF A THIN LAYER ALONG PLANES

© 2023 E. A. Yanovskaya

Moscow State Technological University "STANKIN", Moscow, Russia

The calculations are based on the proposed Ilyushin A.A. [1] theory of flow in a thin plastic layer enclosed between two surfaces of tool bodies approaching each other according to a given law. On contact surfaces, the classical L. Prandtl flow law is adopted [2]. To solve the proposed problem, the well-known boundary value problem in the formulation of the "ideal fluid" is used. This setting is described by nonlinear differential equations in partial derivatives of the first order with respect to the contact pressure and components of the flow velocity vector along the flow plane [3, 4]. In the general case, the desired values are complex functions that depend on the shape of the deformation zone, the value of the contact pressure at the considered point of the contact surface, the presence, composition and degree of lubrication, the roughness of the contacting surfaces, etc. [5, 6]. The paper proposes a method for solving problems of the flow of plastic layers in a new formulation. The analysis of the received result is carried out. Based on the method of characteristics, the problem of the flow of a plastic layer of material between inclined plates in a fixed circular area is solved, when its boundary is formed by grooves in one of the tool bodies, where the plastic material flows freely. Using the proposed solution, it is possible to construct the kinematics of the flow.

Keywords: thin layer, contact pressure; deformation forces; kinematic parameters

DOI: 10.37313/1990-5378-2023-25-4-139-144
EDN: RQGXCH

REFERENCES

1. *A.A. Ilyushin* / Proceedings (1946 - 1966). T.2. Plasticity / Compiled by E.A. Ilyushin, M.R. Korotkin. FIZMATLIT, Moscow, 2004.
2. *L.Prandtl* / Proc. Ist. Int. Congr. App. Mech., Delft, 43. 1924.
3. *E.N. Sosenushkin, V.A. Kadymov, E.A. Yanovskaya, A.A. Arkhipov, T.V. Gureeva, D.S. Gusev, M.V. Prokin.* Development of the theory of flow of a plastically deformable layer, Bulletin of the Tula State University. Technical science. 5 (2019) 131-138.
4. *E.N. Sosenushkin, V.A. Kadymov, E.A. Yanovskaya, T.V. Gureeva.* Aluminum alloy extrusion mechanics when forging a forging with longitudinal ribs, Non-ferrous metals. 3 (2019) 58–64.
5. *V.A. Kadymov, E.N. Sosenushkin, E.A. Yanovskaya.* Contact Problems of Plastic Flow in a Thin Layer: Theory, Analysis of Solutions, and Applications, Journal of Machinery Manufacture and Reliability. 51, 3 (2022) 206-215.
6. *I.M. Volodin.* Modeling of hot forging processes, Mashinostroenie-1, Moscow, 2006.
7. *V.B. Mamaev, M.I. Pervov.* Consideration of contact friction forces at die forging, Vestnik Mashinostroenya. 3 (2016) 74-78.
8. *I.A. Kiiko.* Anisotropy in the flow processes of a thin plastic layer, J/ Appl. Math. Mech.,70, 2 (2006) 311-317.
9. *D.V. Georgievskii.* The Prandtl problem for a plastic layer weakly inhomogeneous with respect to the yield strength, Mech. Solids. 41, 1 (2006) 35-46.
10. *A.D. Polyanin, V.F. Zaitsev.* Handbook of Nonlinear Equations of Mathematical Physics, FIZMATLIT, Moscow, 2002.
11. V.M. Greshnov. Physical and mathematical theory of large irreversible deformations, Fizmatlit, Moscov, 2018.
12. *G. Korn, T. Korn.* Handbook of Mathematics for Researchers and Engineers, Nauka, Moscow, 1970. [13] D.E.R. Godfrey, Theoretical elasticity and plasticity for engineers, Thames and Hudson, London, 1969.
13. *K.N. Solomonov, N.I. Fedorinin, L.I. Tishchuk.* Methodology for constructing metal flow lines in the processes of upsetting flat billets, Bulletin of Scientific and Technical Development. 2 (102) 2016 (36-55).
14. *V.A. Kadymov, E.N. Sosenushkin, E.A. Yanovskaya.* Exact Solutions to an Evolution Equation of Plastic Layer Flow on a Plane, Moscow University Mechanics Bulletin. Allerton Press. Inc. 71 (3) (2016) 69-72.
15. GOST 3778-98 Svinec. Tekhnicheskie usloviya. – Minsk: IPK Izdatel'stvo standartov, 2003. – 8 s.

Elena Yanovskaya, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Applied Mathematics. E-mail: elena_yanovskaya@bc.ru