УДК 517.93, 517.937

О РЕАЛИЗАЦИИ ПРИНЦИПА СУПЕРПОЗИЦИИ ДЛЯ КОНЕЧНОГО ПУЧКА ИНТЕГРАЛЬНЫХ КРИВЫХ БИЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА

А.В. Данеев[1], Р.А. Данеев[2], А.В. Лакеев[3], В.А. Русанов[3], Ю.Д. Аксёнов[1]

[1] Иркутский государственный университет путей сообщения, г. Иркутск, Россия
[2] Восточно-Сибирский институт МВД России, г. Иркутск, Россия
[3] Институт динамики и теории управления СО РАН, г. Иркутск, Россия

Статья поступила в редакцию 15.09.2023

Для конечного семейства управляемых интегральных кривых типа «траектория, программно-позиционное управление», индуцированных в сепарабельном гильбертовом пространстве некоторой заданной билинейной нестационарной дифференциальной системой второго порядка (например, гиперболической), но с разными билинейными регуляторами (с разными операторными коэффициентами при единой билинейной форме этих регуляторов), исследована разрешимость задачи реализации оператор-функций инвариантного линейного регулятора, при наличии которого (в структуре данной дифференциальной системы) объединение этих интегральных кривых представляет семейство её допустимых решений. Исследование проведено на основе анализа непрерывности и полуаддитивности нелинейного функционального оператора Релея-Ритца. Приведен численный иллюстрирующий пример.
Ключевые слова: обратные задачи динамики, гиперболическая система, оператор Релея-Ритца, L-инвариантный регулятор.

DOI: 10.37313/1990-5378-2023-25-6-125-134
EDN: BQFPTY

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ (проект: 121041300056-7).

ВВЕДЕНИЕ

Предлагаемая работа продолжает качественные изыскания [1–4], ставя основной целью построение экзистенциональных доказательств в разрешимости задачи реализации (в сепарабельном гильбертовом пространстве) операторных коэффициентов L-инвариантного регулятора линейной нестационарной дифференциальной системы второго порядка; впрочем, её результаты, очевидно, распространимы на стационарные модели [5–7]. При этом L-инвариантность регулятора предполагает: i) линейность данного регулятора, ii) исследуемая (моделируемая *a posteriori*) дифференциальная система (D-система) должна содержать в классе допустимых решений конечное семейство управляемых интегральных кривых (динамических процессов типа «*траектория*, *программное управление*»), при этом каждая такая интегральная кривая индуцирована билинейным регулятором (BL-регулятором), не исключая вариант, когда эти регуляторы параметрически индивидуальны (различны).

1. ТЕРМИНОЛОГИЯ, ОБОЗНАЧЕНИЯ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Далее $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$, $(Z_i, \|\cdot\|_Z)$, $i = 1, 2$ – вещественные сепарабельные гильбертовы пространства (предгильбертовость [8] определяют нормы $\|\cdot\|_X$, $\|\cdot\|_Y$, $\|\cdot\|_Z$), $U := Y \times Z_1 \times Z_2$ – гильбертово пространство-произведение с нормой $\|(y, z_1, z_2)\|_U := (\|y\|_Y^2 + \sum_{i=1,2} \|z_i\|_Z^2)^{1/2}$, $L(Y, X)$ – банахово пространство с операторной нормой $\|\cdot\|_{L(Y,X)}$ всех линейных непрерывных операторов, действующих из Y в X (аналогично $(L(X, X), \|\cdot\|_{L(X,X)})$ и $(L(Z_i, X), \|\cdot\|_{L(Z,X)})$), X^i – i-ая декартова степень пространства X, $\mathcal{L}(X^i, Z_i)$ – пространство всех непрерывных i-линейных (линейных при $i = 1$ и билинейных при $i = 2$) отображений из X^i в Z_i; ниже через $\mathbb{O}$ будем обозначать нулевой оператор из $\mathcal{L}(X^2, Z_2)$.

Пусть $T := [t_0, t_1]$ – отрезок числовой прямой R с мерой Лебега μ и $\wp_\mu$ – σ-алгебра всех μ-измеримых подмножеств из T. Если ниже $(\mathbf{B}, \|\cdot\|_\mathbf{B})$ – банахово пространство, то через $L_p(T, \mu, \mathbf{B})$, $p \in [1, \infty)$ будем обозначать банахово фактор-пространство классов

Данеев Алексей Васильевич, доктор технических наук, профессор кафедры информационных систем и защиты информации. E-mail: daneev@mail.ru
Данеев Роман Алексеевич, кандидат технических наук, доцент кафедры информационных технологий. E-mail: romasun@mail.ru
Лакеев Анатолий Валентинович, доктор физико-математических наук, начальник отделения Института динамики и теории управления СО РАН.
Русанов Вячеслав Анатольевич, доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник Института динамики и теории управления СО РАН. E-mail: v.rusanov@mail.ru
Аксенов Юрий Дмитриевич, аспирант ИрГУПС. E-mail: aksen991304@gmail.com

μ-эквивалентности всех интегрируемых по Бохнеру [8, с. 137] отображений ξ: $T \to \mathbf{B}$ с нормой $\|\xi\|_p := (\int_T \|\xi(\tau)\|_{\mathbf{B}}^p \mu(d\tau))^{1/p} < \infty$, через $L_\infty(T, \mu, \boldsymbol{B})$ – пространство всех (эквивалентных классов) сильно μ-измеримых и μ-существенно ограниченных функций из T в $\boldsymbol{B}$. Кроме того, $AC^1(T, X)$ – множество всех функций ζ: $T \to X$, первая производная которых является абсолютно непрерывной на T функцией (относительно меры μ), сверх того, примем, что

$$\mathbf{\Pi} := AC^1(T, X) \times \mathrm{L}_2(T, \mu, Y) \times \mathrm{L}_2(T, \mu, Z_1) \times \mathrm{L}_2(T, \mu, Z_2).$$

Введем вспомогательные конструкции, связанные с системой обозначений. Через

$$H_2 := \mathrm{L}_2(T, \mu, Y) \times \mathrm{L}_2(T, \mu, Z_1) \times \mathrm{L}_2(T, \mu, Z_2)$$

обозначим пространство-произведение с топологией, индуцированной нормой

$$\|(w_0, w_1, w_2)\|_H := (\int_T \|(w_0(\tau), w_1(\tau), w_2(\tau))\|_U^2 \mu(d\tau))^{1/2}, \ (w_0, w_1, w_2) \in H_2;$$

в силу конструкции $\|\cdot\|_H$ и тождества параллелограмма [8, сс. 52, 79] H_2 – гильбертово пространство.

Далее, в качестве пространства нестационарных операторных коэффициентов билинейных регуляторов (*BL*-регуляторов) исследуемой *D*-системы рассмотрим банахово пространство-произведение

$$\boldsymbol{L}_2 := \mathrm{L}_2(T, \mu, L(Y, X)) \times \mathrm{L}_2(T, \mu, L(Z_1, X)) \times \mathrm{L}_2(T, \mu, L(Z_2, X))$$

классов μ-эквивалентности упорядоченных 3-кортежей оператор-функций с нормой

$$\|(B_0, B_1, B_2)\|_{\mathrm{L}} := (\int_T (\|B_0(\tau)\|_{L(Y,X)}^2 + \textstyle\sum_{i=1,2} \|B_i(\tau)\|_{L(Z,X)}^2)\mu(d\tau))^{1/2}.$$

Кроме того, условимся, что пространство операторных коэффициентов самой *D*-системы задает

$$\boldsymbol{D} := L_1(T, \mu, L(X, X)) \times L_1(T, \mu, L(X, X)) \times (\mathrm{L}_\infty(T, \mu, L(X, X)) \setminus \{0\}).$$

Теперь определим *a priori* исхоную операторную «*протомодель*» нестационарных коэффициентов (при траектории, и её производных) моделируемой *D*-системы в виде тройки оператор-функций

$$(A_0, A_1, A_2) \in \boldsymbol{D},$$

а также зададим (в структуре *BL*-регуляторов *D*-системы) 2-вектор *i*-линейных отображений

$$(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) \in \mathcal{L}(X^1, Z_1) \times \mathcal{L}(X^2, Z_2).$$

Ниже будем отличать $(x, u, \mathcal{B}_1(x), \mathcal{B}_2(x, x)) \in \mathbf{\Pi}$ как класс эквивалентности (mod μ) от представителя этого класса, а именно, вектор-функции $t \mapsto (x(t), u(t), \mathcal{B}_1(x(t)), \mathcal{B}_2(x(t), x(t)))$. Ясно, что

$$\{\mathcal{B}_1(x): (x, u, \mathcal{B}_1(x), \mathcal{B}_2(x, x)) \in \mathbf{\Pi}\} \subset L_\infty(T, \mu, Z_1),$$
$$\{\mathcal{B}_2(x, x): (x, u, \mathcal{B}_1(x), \mathcal{B}_2(x, x)) \in \mathbf{\Pi}\} \subset L_\infty(T, \mu, Z_2).$$

Далее, фиксируем (возможно *a posteriori*) конечное «*k*-семейство» динамических процессов:

$$N_1 = (x_1, u_1, \mathcal{B}_1(x_1), \mathcal{B}_2(x_1, x_1)) \in \mathbf{\Pi}: (x_1, u_1) \in AC^1(T, X) \times L_2(T, \mu, Y),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (1)$$
$$N_k = (x_k, u_k, \mathcal{B}_1(x_k), \mathcal{B}_2(x_k, x_k)) \in \mathbf{\Pi}: (x_k, u_k) \in AC^1(T, X) \times L_2(T, \mu, Y),$$

как варианты поведения исследуемой *D*-системы с траекториями *x*, программным управлением *u* и обратными связями $x \mapsto \mathcal{B}_1(x)$, $x \mapsto \mathcal{B}_2(x, x)$ (т.е. *L*-формами и *BL*-формами), при этом $N_i \neq N_j$, $i \neq j$. Причем предполагаем, что динамические процессы N_j, $j = 1, \ldots, k$ индуцированы решениями *одной* дифференциальной системы второго порядка, но возможно с *разными* для этих динамических процессов *BL*-регуляторами (правые части равенств системы (2)):

$$\exists (B_{01}, B_{11}, B_{21}) \in \boldsymbol{L}_2:$$
$$A_2 d^2x_1/dt^2 + A_1 dx_1/dt + A_0 x_1 = B_{01}u_1 + B_{11}\mathcal{B}_1(x_1) + B_{21}\mathcal{B}_2(x_1, x_1),$$
$$(x_1, u_1, \mathcal{B}_1(x_1), \mathcal{B}_2(x_1, x_1)) = N_1;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (2)$$
$$\exists (B_{0k}, B_{1k}, B_{2k}) \in \mathbf{L}_2:$$
$$A_2 d^2x_k/dt^2 + A_1 dx_k/dt + A_0 x_k = B_{0k}u_k + B_{1k}\mathcal{B}_1(x_k) + B_{2k}\mathcal{B}_2(x_k, x_k),$$
$$(x_k, u_k, \mathcal{B}_1(x_k), \mathcal{B}_2(x_k, x_k)) = N_k;$$

где $N_i \neq N_j$, $i \neq j$, при этом нарушение условия $(B_{0i}, B_{1i}, B_{2i}) = (B_{0j}, B_{1j}, B_{2j})$, $i \neq j$ необременительно (допустимо). В аналитической конструкции *x*-решения следуем [9, с. 418]; т.е. равенства в дифференциальных уравнениях системы (2) рассматриваются как тождества в $\mathrm{L}_1(T, \mu, X)$.

Рассмотрим задачу: для объединенного пучка $N_+ := \cup_{j=1,\ldots,k} N_j$ определить условия существования упорядоченной системы оператор-функций $(B_0^+, B_1^+, B_2^+) \in \mathbf{L}_2$, (*L*-инвариантного регулятора) и оператора $\mathbb{B}_1^+, \in \mathbb{L}(X^1, Z_1)$, для которых осуществима дифференциальная реализация пучка N_+ вида:

$$A_2 d^2x/dt^2 + A_1 dx/dt + A_0 x = B_0^+ u + B_1^+ \mathbb{B}_1^+(x) + B_2^+ \mathbb{O}(x, x), \qquad (3)$$
$$(x, u, \mathbb{B}_1(x), \mathbb{B}_2(x, x)) \in N_+.$$

Решение обратной задачи (3) приводит к некоторому количеству теоретических схем, объясняющих (на операторном языке) физическую природу *L-инвариантного регулятора*, попутно вырабатывая новую математическую интуицию в апостериорном моделировании гиперболических систем [5, 10]. В целом постановку задачи (3) геометрически можно трактовать, как синтез общего (для нелинейных траекторных процессов N_j, j=1, …, k) нестационарного линейного векторного поля [11].

Замечание 1. Нет структурных препятствий, чтобы распространить полученные ниже результаты на теорию реализации *L*-инвариантного регулятора, включающего в свой состав полилинейные формы (*PL*-формы) из $\mathbb{L}(X^i \times Y, Z_i)$, содержащие *l*-раз ($l \leq i$) траекторию *x* и ($i$–$l$–1)-раз производную dx/dt, а также 1-раз программное управление *u*; т.е.

в данной постановке для любого $\mathbb{B}_i \in \mathbb{L}(X^i \times Y, Z_i)$ будет

$$\mathbb{B}_i(\overbrace{x, \ldots, x}^{l\text{-раз}}, \underbrace{dx/dt, \ldots, dx/dt}_{(i\text{-}l\text{-}1)\text{-раз}}, u) \in \mathrm{L}_2(T, \mu, Z_i);$$

этого нельзя сказать в отношении структуры регулятора с программно-позиционными связями из $\mathbb{L}(X^i \times Y^j, Z_{ij})$, $j \geq 2$, т.к. в данном случае, т.е. когда область определения оператора $\mathbb{B} \in \mathbb{L}(X^i \times Y^j, Z_{ij})$, $j \geq 2$ включает j-раз переменную u, может *не выполняться* условие $\mathbb{B}(x, \ldots, dx/dt, \ldots, u) \in \mathrm{L}_2(T, \mu, Z_{ij})$.

Если для системы (3) ставить задачу разрешимости реализации PL-форм из $\mathbb{L}(X^i \times Y, Z_i)$, $i = 1, \ldots, n$, (см. ниже замечание 5) то геометрической основой математического аппарата может выступить тензорное произведение гильбертовых пространств [4], в том числе, в энтропийной постановке [12].

2. КОНСТРУКЦИИ СОПУТСТВУЮЩЕГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФОРМАЛИЗМА

Обозначим через $\mathrm{L}(T, \mu, R)$ пространство классов μ-эквивалентности всех вещественных μ- измеримых на T функций и пусть $\leq_{\mathrm{L}}$ – квазиупорядочение в $\mathrm{L}(T, \mu, R)$ такое, что $\varphi_1 \leq_{\mathrm{L}} \varphi_2$, если $\varphi_1(t) \leq \varphi_2(t)$ μ-почти всюду в T. Наименьшую верхнюю грань для подмножества $W \subset \mathrm{L}(T, \mu, R)$ обозначим через $\sup_{\mathrm{L}} W$, если эта грань существует для подмножества W в структуре частичного упорядочения $\leq_{\mathrm{L}}$.

Поскольку $\mathbf{\Pi} = AC^1(T, X) \times H_2$, то вектор-функцию $(q, w_0, w_2) \in \mathbf{\Pi}$ будем (как правило) обозначать через (q, w); т.е. в данном положении имеем: $q \in AC^1(T, X)$, $w = (w_0, w_2) \in H_2$, $w \longmapsto \|w\|_U \in \mathrm{L}_2(T, \mu, R)$.

В силу теоремы 2.1 [13] для $q \in AC^1(T, X)$ имеет место $d^2q/dt^2 \in \mathrm{L}_1(T, \mu, X)$, поэтому корректно

Определение 1 [3, 4]. *Пусть* $(A_0, A_1, A_2) \in \mathbf{D}$. *Тогда нелинейный оператор* $\Psi\colon \mathbf{\Pi} \to \mathrm{L}(T, \mu, R)$ *вида*

$$\Psi(q,w)(t) := \begin{cases} \|w(t)\|_U^{-1} \|A_2(t)d^2(t)/dt^2 + A_1(t)dq(t)/dt + A_0(t)q(t)\|_X, \\ \text{если } w(t) \neq 0 \in U; \\ 0 \in R, \text{ если } w(t) = 0 \in U; \end{cases} \tag{4}$$

назовем оператором Релея–Ритца.

Рассмотрим (вне привязки к системе нелинейных процессов (1)) динамический пучок

$$N \subset \{(x, u, \mathbb{B}_1(x), \mathbb{B}_2(x, x)) \in \mathbf{\Pi}\colon (x, u) \in AC^1(T, X) \times \mathrm{L}_2(T, \mu, Y)\},$$
$$(\mathbb{B}_1, \mathbb{B}_2) \in \mathbb{L}(X^1, Z_1) \times \mathbb{L}(X^2, Z_2),$$
$$\mathrm{Card}\, N \leq \exp \aleph_0,$$

и пусть Q – поглощающее множество в $\mathrm{Span}\, N$; в геометрии поглощающего множества следуем [8], т.е. $\cup\{rQ\}_{r>0} = \mathrm{Span}\, N$. Фиксируя терминологию (мотивацию см. в теореме 2 [3]), примем

Определение 2 [3]. *Динамический пучок N регулярный для оператор- функций* $(A_0, A_1, A_2) \in \mathbf{D}$ *в том и только в том случае, если имеет место следующее положение*:

$$\mathrm{supp}\, \|A_2 d^2q/dt^2 + A_1 dq/dt + A_0 q\|_X \subset$$
$$\subset \mathrm{supp}\, \|w\|_U \ (\mathrm{mod}\ \mu),\ (q, w) \in Q.$$

Здесь (и далее) «supp-носитель» функции определен с точностью до множества меры нуль.

Предложение 1. (i) *Если динамический пучок N регулярный, то сужение* $\Psi \mid \mathrm{Span}\, N$ *имеет (для любой вектор-функции* $(q, w) \in \mathrm{Span}\, N$*) аналитической представление*

$$\Psi(q, w) = \|A_2 d^2q/dt^2 + A_1 dq/dt + A_0 q\|_X (\|w\|_U + \chi_{S_w})^{-1},$$

где χ_{S_w} *– индикатор множества* $S_w := T \setminus \mathrm{supp}\, \|w\|_U$;

(ii) *в обратной задаче* (3) *объединенный динамический пучок* N_+ *– регулярный.*

Приведем необременительные исходные положения, обеспечивающие пункт (i) предложения 1.

Предложение 2. *Если* $\ker \mathbb{B}_1 = 0$, *то пучок N будет регулярным для всех* $(A_0, A_1, A_2) \in \mathbf{D}$.

Доказательство. Ясно, что положение $\ker \mathbb{B}_1 = 0$ влечет

$$\mathrm{supp}\, \|\mathbb{B}_1(x)\|_Z \cup \mathrm{supp}\, \|\mathbb{B}_2(x, x)\|_Z =$$
$$= \mathrm{supp}\, \|x\|_X \ (\mathrm{mod}\ \mu),\ (x, u, \mathbb{B}_1(x), \mathbb{B}_2(x, x)) \in N.$$

Поэтому достаточно показать, что для любых функций $f \in AC(T, X)$, $g \in \mathrm{L}(T, \mu, R)$ равенство $df(t)/dt = =0$ выполняется μ-почти всюду в $T_{fg} := \{t \in T\colon \|f(t)\|_X + |g(t)| = 0\}$; ясно, что в структуре доказательства теоремы пара $(f, df/dt)$ выполняет двоякую роль – как пары $(x, dx/dt)$ и как пары $(dx/dt, d^2x/dt^2)$.

Пусть $T_f := \{t \in T\colon f(t) = 0\}$. Поскольку $T_f \supset T_{fg}$, то в случае $\mu(T_f) = 0$ утверждение

$$\{t \in T\colon \|df(t)/dt\|_X = 0\} \supset T_{fg} \ (\mathrm{mod}\ \mu)$$

прозрачно. Поэтому рассмотрим вариант $\mu(T_f) \neq 0$.

Обозначим через $T_0 := \{t \in T_f\colon \exists\delta > 0,\ \mu((t\text{-}\delta, t+\delta) \cap T_f) = 0\}$. Покажем, что $\mu(T_0) = 0$. Для этого выберем каждому $t \in T_0$ константу $\delta^*_t > 0$ так, что $\mu((t\text{-}\delta^*_t, t+\delta^*_t) \cap T_f) = 0$. Найдём такие рациональные числа δ'_t, δ''_t, что $\delta'_t \in (t\text{-}\delta^*_t, t)$, $\delta''_t \in (t, t+\delta^*_t)$ и пусть $I_t := (\delta'_t, \delta''_t)$. Тогда семейство интервалов $\{I_t\}_{t\in T0}$ покрывает множество T_0, а т.к. каждый интервал I_t является открытым с рациональными концами, то семейство $\{I_t\}_{t\in T0}$ содержит счётное подсемейство $\{I_{ti}\}_{i=1,2,\ldots}$, также являющееся покрытием множества T_0.

Далее, поскольку для любого индекса $i = 1, 2, \ldots$ выполняется $I_{ti} \subset (t_i\text{-}\delta^*_{ti}, t_i+\delta^*_{ti})$, то $\mu(I_{ti} \cap T_\delta) = 0$, и значит справедлива следующая цепочка μ-отношений:

$$\mu(T_0) = \mu(T_0 \cap (\cup_{i=1,2,\ldots} I_{ti})) =$$
$$= \mu(\cup_{i=1,2,\ldots} T_0 \cap I_{ti}) \leq \Sigma_{i=1,2,\ldots}\, \mu(T_0 \cap I_{ti}) = 0,$$

откуда $\mu(T_0) = 0$. Теперь проведём завершающую часть доказательства.

Пусть $t \in T_f \setminus T_0$, тогда для любого $\delta > 0$ будет $\mu((t\text{-}\delta, t+\delta) \cap T_f) > 0$, и поскольку $f \in AC(T, X)$, то найдётся такое множество $T^* \subset T$, что $\mu(T^*) = 0$ и $\forall t \in T_f \backslash T^*$ существует $df(t)/dt$. Покажем, что $df(t)/dt = 0$ для $t \in T_f \backslash (T_0 \cup T^*)$. Действительно, для любого натурального j имеем $\mu((t - 1/j,\ t + 1/j) \cap T_f) > 0$ и, следовательно, найдётся момент $t_j \neq t$, $|t_j - t| < 1/j$, $t_j \in T_f$. Но тогда в структуре сильной топологии будет выполнятся предельный переход (что, в конечном итоге, и требовалось показать):

$$df(t)/dt = \lim\{(f(t-\Delta t) - f(t))/\Delta t\colon \Delta t \to 0\} =$$
$$= \lim\{(f(t_j) - f(t))(t_j - t)^{-1} = 0 \in X\colon j \to \infty\} = 0 \in X.$$

Следствие 1. *Если* $(x, u, \mathbb{B}_1(x), \mathrm{B}_2(x, x)) \in \mathbf{\Pi}$ *и* $\ker \mathbb{B}_1 = 0$, *то* $\wp_\nu \subset \wp_{\nu\_}$, *где* $\wp_\nu$, $\wp_{\nu\_}$ *– соответствующие лебеговски пополненные σ-алгебры бихевиористических мер*

$$\nu(S) := \int_S \|(u(\tau), \mathbb{B}_1(x(\tau)), \mathbb{B}_2(x(\tau), x(\tau)))\|_U^2\, \mu(d\tau),\ \ S \in \wp_\mu,$$
$$\nu\_(S) := \int_S \|A_2(\tau)d^2x(\tau)/d\tau^2 + A_1(\tau)dx(\tau)/d\tau + A_0(\tau)x(\tau)\|_X\, \mu(d\tau),\ \ S \in \wp_\mu,$$

при этом $\mathrm{Im}\ \mathbb{B}_1 = Z_1$ *дополнительно влечет* $Z_1 = X$, *причем для всякой тройки* $(A_0, A_1, A_2) \in \mathbf{D}$ *будет*

$$\|(u, \mathbb{B}_1(x), \mathbb{B}_2(x, x))\|_U^{-1}\ \|A_2d^2x/dt^2 + A_1dx/dt + A_0x\|_X \in \mathrm{L}_2(T, \mu, R) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \|(u, x, \mathbb{B}_2(x, x))\|_U^{-1}\ \|A_2d^2x/dt^2 + A_1dx/dt + A_0x\|_X \in \mathrm{L}_2(T, \mu, R) \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow$ *процесс* $(x, u, \mathbb{B}_1(x), \mathbb{B}_2(x, x))$ *имеет дифференциальную реализацию* (2).

Из функциональной конструкции (4) следует, что оператор Релея–Ритца удовлетворяет простым, но весьма важным[1], соотношениям (ниже $\chi_\varnothing$ – «нулевая функция» пространства $\mathrm{L}(T, \mu, R)$):

$$\chi_\varnothing \leq_{\mathrm{L}} \Psi(\pm r\phi) = \Psi(\phi),\ r \in R \setminus \{0\},\ \phi \in \mathbf{\Pi}. \quad (5)$$

Теперь, прежде чем идти дальше, необходимо ввести дополнительную терминологию.

Определение 3 [2, 14]. *Оператор Релея–Ритца назовем полуаддитивным с весом* $p > 0$ *на множестве* $\mathbb{E} \subset \mathbf{\Pi}$, *если для любой пары* $(\phi_1, \phi_2) \in \mathbb{E} \times \mathbb{E}$ *справедливо*

$$\Psi(\phi_1 + \phi_2) \leq_{\mathrm{L}} p\, \Psi(\phi_1) + p\, \Psi(\phi_2).$$

Лемма 1. *Полуаддитивность (с фиксированным весом) оператора Релея–Ритца есть свойство конечного характера для подмножеств множества* $\mathbf{\Pi}$.

Доказательство. Пусть на некотором множестве $\mathbb{E} \subset \mathbf{\Pi}$ оператор Ψ полуаддитивен с некоторым весом p, тогда данный оператор будет полуаддитивен с этим весом на любом конечном подмножестве из $\mathbb{E}$. С другой стороны, если Ψ полуаддитивен с тем же весом на любом конечном подмножестве множества $\mathbb{E}$, то для любой пары вектор-функций $(\phi_1, \phi_2) \in \mathbb{E} \times \mathbb{E}$ будет выполняться

$$\Psi(\phi_1 + \phi_2) \leq_{\mathrm{L}} p\, \Psi(\phi_1) + p\, \Psi(\phi_2),$$

поскольку на конечном подмножестве $\{\phi_1, \phi_2\} \subset \mathbb{E}$ оператор Ψ полуаддитивен с весом p.

Взаимоотношение между леммой 1 и леммой Тьюки[2] [15, с. 55] приводит к важной геометрической характеристике полуаддитивности оператора Релея–Ритца, а именно, в линейном многообразии $\mathbf{\Pi}$ существуют максимальные множества, на которых оператор (4) полуаддитивен с некоторым весом $p > 0$, при этом данные множества не могут быть *линейными* в случае $p \in (0, 1)$; чтобы убедиться, достаточно рассмотреть действие Ψ на $\mathbb{E} = \{\phi, 0\} \subset \mathbf{\Pi}$, $\phi \neq 0$ (за исключением тривиального варианта $\mathrm{E} = \{0\}$), именно поэтому ниже в лемме 2 (и по умолчанию дальше) предполагается, что вес полуаддитивности оператора Ψ представляет некоторая фиксированная постоянная $p \in [1, \infty)$.

Оправданием определения 3 и леммы 1 служит следующая лемма важная в контексте теоремы 2.

Лемма 2. *Пусть* $p \in [1, \infty)$, *тогда в* $\mathbf{\Pi}$ *существует (не единственное) максимальное линейное множество* $\mathbb{E}$, *на котором оператор Релея–Ритца полуаддитивен с весом* p.

Доказательство. Пусть ϕ_1 – ненулевой элемент в $\mathbf{\Pi}$. Тогда в силу (5) оператор Ψ полуаддитивен с весом p на линейной оболочке $\mathbb{E}_1 := \{r\phi_1\colon r \in R\}$. Далее, пусть $\phi_2 \in \mathbf{\Pi}$, $\phi_2 \notin \mathbb{E}_1$ и Ψ полуаддитивен на $\mathbb{E}_1 \cup \{\phi_2\}$ с весом p; не трудно установить[3], что такая вектор-функция ϕ_2 существует для любого веса $p \in [1, \infty)$. Выберем в $\mathbb{E}_1 + \mathbb{E}_2$, где $\mathbb{E}_2$ – линейная оболочка над ϕ_2, произвольный элемент

$$r_1\phi_1 + r_2\phi_2,$$

где $r_1, r_2 \in R$, $r_2 \neq 0$. В такой постановке в соответствии с (5) будут выполняться соотношения:

$$\Psi(r_1\phi_1 + r_2\phi_2) =$$
$$= \Psi(r_1r_2^{-1}\phi_1 + \phi_2) \leq_{\mathrm{L}} p\, \Psi(r_1r_2^{-1}\phi_1) + p\, \Psi(\phi_2) =$$
$$= p\, \Psi(r_1\phi_1) + p\, \Psi(r_2\phi_2),$$

откуда следует, что оператор Ψ полуаддитивен на линейном многообразии $\mathbb{E}_1 + \mathbb{E}_2$ с весом p. Рассуждая аналогично, можно показать, что в предыдущих выкладках $\mathbb{E}_1$ можно заменить на любое ненулевое линейное подмножество из $\mathbf{\Pi}$, на котором Ψ полуаддитивен с весом p (см. ниже пример 1).

Остальные построения будут касаться цепей, поэтому пусть $\mathbb{P}$ – семейство всех упорядоченных

---

[1] Пусть P_Π – проективное пространство [11], ассоциированное с $\mathbf{\Pi}$. Тогда (5) индуцирует [1] отображение проективизации $P\Psi\colon P_\Pi \to \mathrm{L}_+(T, \mu, R)$ оператора Релея–Ритца, при которой $P\Psi(\gamma) := \Psi[\gamma]$, $\gamma \in P_\Pi$ (т.е. $\gamma = \{r\phi\colon r \in R \setminus \{0\}\}$, $\phi \in \mathbf{\Pi}$).

[2] Напомним, что лемма Тьюки является альтернативной формой аксиомы выбора [15, с. 55].

[3] Пусть $\phi_1 = (q_1, w_1)$. Тогда достаточно взять вектор-функцию $\phi_2 = (q_2, w_2)$, для которой $t \mapsto \langle w_1(t), w_2(t)\rangle_U = \chi_\varnothing$, где $\langle\cdot,\cdot\rangle_U$ – скалярное произведение в гильбертовом пространстве U.

пар $(\mathbb{E}', p')$, где $\mathbb{E}'$ – ненулевое линейное множество в **П** и $p' \in [1, \infty)$, причём оператор Релея–Ритца полуаддитивен на $\mathbb{E}'$ с весом p'. Введем в $\mathbb{P}$ частичное упорядочение $\prec$, считая

$$(\mathbb{E}', p') \prec (\mathbb{E}'', p'') \Leftrightarrow \mathbb{E}' \subset \mathbb{E}'', \ p' = p''.$$

По теореме Хаусдорфа (принцип максимальности Хаусдорфа [15, с. 54]) в семействе $\mathbb{P}$ существует Ω – максимальная цепь (максимальное линейно упорядоченное множество), содержащая цепь $(\mathbb{E}_1, p) \prec (\mathbb{E}_1 + \mathbb{E}_2, p)$. Пусть $\mathcal{L}$ – множество всех линейных множеств $\mathbb{E}_\gamma$ в **П**, таких, что $(\mathbb{E}_\gamma, p) \in \Omega$. Тогда $\mathcal{L}$ будет линейно упорядочено относительно теоретико-множественного включения, следовательно, объединение $\mathbb{E} := \cup\{\mathbb{E}_\gamma\colon \mathbb{E}_\gamma \in \mathcal{L}\}$ образует (тривиальным образом) линейное многообразие в **П**.

Далее, если $(\phi_1, \phi_2) \in \mathbb{E} \times \mathbb{E}$, то $(\phi_1, \phi_2) \in \mathbb{E}_\gamma \times \mathbb{E}_\gamma$ для некоторого множества $\mathbb{E}_\gamma \in \mathcal{L}$, откуда приходим к $\Psi(\phi_1 + \phi_2) \leq_L p\,\Psi(\phi_1) + p\,\Psi(\phi_2)$ и значит $(\mathbb{E}, p) \in \Omega$. При этом если бы многообразие $\mathbb{E}$ не оказалось максимальным в **П**, на котором наш оператор Ψ полуаддитивен с весом p, то конструкция линейного расширения, указанная выше, позволила бы получить в семействе $\mathbb{P}$ элемент $(\mathbb{E}^*, p)$, для которого $\mathbb{E}^*$ строго содержит $\mathbb{E}$, но это противоречило бы максимальности цепи Ω в семействе $\mathbb{P}$.

Пример 1. Построим (на базе модификации теоремы 2 [2]) тройку $(\Psi, \tilde{N}, p)$, для которой оператор (4) полуаддитивен[4] с весом $p = 1$ на бесконечномерном линейном многообразии $\tilde{N} \subset$ **П**, замкнутом (в силу теоремы 31.D [9, с. 111]) в пространстве $(L_2(T, \mu, X), \|\cdot\|_2) \times (H_2, \|\cdot\|_H)$ с топологией произведения.

Пусть в формуле (4) оператор-функции A_0, A_1, A_2 имеют следующие представления:

$$A_0 = A_1 = 0 \in L_1(T, \mu, L(X, X)),\ A_2 = \Gamma \in L(X, X),$$

где оператор Γ осуществляет ненулевую гомотетию [20, с. 87] на X и пусть $\tilde{N}$ – линейный динамический пучок, индуцированный всеми решениями D-системы (2) с операторами A_0, A_1, A_2 и $B_1 = \mathrm{id}_X$, $\mathbb{B}_1 = \Gamma$, $\mathbb{B}_2 = 0 \in \mathbb{L}(X^2, Z_2)$, $u(\cdot) = 0 \in L_2(T, \mu, Y)$. В данной постановке оператор Ψ полуаддитивен на $\tilde{N}$ с весом $p = 1$, поскольку (как нетрудно установить) $\Psi(\phi) = \chi_T$ для любой вектор-функции $\phi \in \tilde{N}$.

Теперь рассмотрим весьма важный вопрос о *непрерывности* [16] нелинейного функционального оператора Релея–Ритца. Для этого в пространстве $L(T, \mu, R)$ введем векторную топологию, порождаемую сходимостью по мере μ. Хорошо известно (теорема 14 [17, с. 64]), что эта топология порождается *инвариантной*[5] метрикой (в первоначальной терминологии [18, с. 63] – квазинормой):

$$\rho(\xi, \zeta) := \textstyle\int_T (1 + |\xi(\tau) - \zeta(\tau)|)^{-1} |\xi(\tau) - \zeta(\tau)| \mu(d\tau),\ \xi, \zeta \in L(T, \mu, R);$$

отметим, что $(L(T, \mu, R), \rho)$ – полное сепарабельное метрическое пространство (теорема 15 [17, с. 65]).

Следующая ниже лемма мотивирована расширением теоремы 2 [4] в контексте примера 1 [4].

Лемма 3. *Пусть* $(\mathbf{П}, \rho')$, $(\mathbf{П}, \rho'')$ *– метрические пространства с* (ρ', ρ'')*-метриками вида*

$$\rho'((g, w), (\hat{g}, \hat{w})) := \rho(\|g\|_X, \|\hat{g}\|_X) + \rho(\|w\|_U, \|\hat{w}\|_U),$$
$$\rho''((g, w), (\hat{g}, \hat{w})) := \rho'((g, w), (\hat{g}, \hat{w})) + \rho^\mu(w, \hat{w}),$$
$$\rho^\mu(w, \hat{w}) := 2^{-1}\mu(\mathrm{supp}\,\|w\|_U \,\Delta\, \mathrm{supp}\,\|\hat{w}\|_U),$$
$$(g, w), (\hat{g}, \hat{w}) \in AC^1(T, X) \times H_2,$$

где Δ *– симметрическая разность множеств и пусть* $\mathcal{T}'$, $\mathcal{T}''$ *– топологии пространств* $(\mathbf{П}, \rho')$, $(\mathbf{П}, \rho'')$. *Кроме того, примем, что* $\mathbb{E}^\# := \{(g, w) \in \mathbf{П}\colon \mathrm{supp}\,\|w\|_U = T\}$. *Тогда справедливы утверждения*:

(i) *метрика* ρ' *является инвариантной, при этом топология* $\mathcal{T}'$ *– векторная (операции векторного пространства* **П** *непрерывны в данной топологии)*;

(ii) ρ^μ *– не инвариантная псевдометрика в* H_2, ρ'' *– не инвариантная метрика в* **П**, *при этом топология* $\mathcal{T}''$ *не будет векторной (алгебраические операции в* **П** *не являются* $\mathcal{T}''$*-непрерывными)*;

(iii) *топология* $\mathcal{T}'$ *строго слабее топологии* $\mathcal{T}''$, *при этом* $\mathbf{П} \setminus \mathbb{E}^\# \in \mathcal{T}''$;

(iv) *тождественное отображение* $\mathrm{id}_{\mathbf{П}}\colon (\mathbf{П}, \rho') \to (\mathbf{П}, \rho'')$ *претерпевает в точках области* $\mathbf{П} \setminus \mathbb{E}^\#$ *разрывы, тогда как отображение* $\mathrm{id}_{\mathbf{П}}\colon (\mathbf{П}, \rho'') \to (\mathbf{П}, \rho')$ *– непрерывно*;

(v) *если* $(\mathbb{E}, \mathcal{T}'')$ *и* $(\mathbb{E}, \mathcal{T}')$ *– некоторые топологические подпространства, соответственно, пространств* $(\mathbf{П}, \mathcal{T}'')$ *и* $(\mathbf{П}, \mathcal{T}')$, *и при этом* $(\mathbb{E}, \mathcal{T}'')$ *– компакт, то* $\mathcal{T}'' = \mathcal{T}'$;

(vi) *оператор Релея–Ритца* $\Psi\colon (\mathbf{П}, \rho'') \to (L(T, \mu, R), \rho)$ *является непрерывным*;

(vii) *сужение* $\Psi\colon (\mathbb{E}^\#, \rho') \to (L(T, \mu, R), \rho)$ *– непрерывно.*

Доказательство. Ограничимся установлением утверждения (ii), поскольку вывод предложений (i), (iii)–(vii) можно опустить в виду их прозрачности в силу теоремы 4 [16] и следствия 3 [16]. Пусть

---

[4] Данное свойство, когда вес полуаддитивности равен 1, сродни свойству «сублинейности» [20, с. 400].

[5] Инвариантность предполагает $\rho(\xi + \gamma, \zeta + \gamma) = \rho(\xi, \zeta)$ для любых $\xi, \zeta, \gamma \in L(T, \mu, R)$. Не стоит думать, что свойство инвариантности не существенно. Оно исключает определенные «патологии», в частности, если две метрики на $L(T, \mu, R)$ индуцируют одну и туже топологию, и при этом данные метрики инвариантные, то они не могут определять в $L(T, \mu, R)$ разные запасы последовательностей Коши (обратное допустимо, если одна из метрик неинвариантная).

$$A, B \in \wp_\mu,\ A \cap B = \varnothing,\ \mu(A) \neq 0 \neq \mu(B),\ h \in U,\ \|h\|_U > 0,$$

$$\varphi^\# := \chi_T h,\ \ \omega^\# := -\chi_T h,\ \ \varphi_n^\# := \varphi^\# + n^{-1}\varphi^\#,$$

$$\omega_n^\# := \omega^\# - n^{-1}\omega^\#,\ n = 1, 2, \dots,$$

где χ_T – характеристическая функция интервала T (ниже аналогично для множеств $A, B, \varnothing \in \wp_\mu$).

Поскольку $A \Delta B \subset (A \Delta C) \cup (B \Delta C)$, то (H_2, ρ^μ) – псевдометрическое пространство, причем

$$\rho^\mu(\chi_A h + \varphi^\#, \chi_B h + \varphi^\#) = 2^{-1}\mu(\mathrm{supp}\|\chi_A h + \varphi^\#\|_U \ \Delta\ \mathrm{supp}\|\chi_B h + \varphi^\#\|_U) = 0 \neq$$

$$\neq 2^{-1}\mu(A) + 2^{-1}\mu(B) = 2^{-1}\mu(\mathrm{supp}\|\chi_A h\|_U \ \Delta\ \mathrm{supp}\|\chi_B h\|_U) = \rho^\mu(\chi_A h, \chi_B h),$$

т.е. псевдометрика ρ^μ – не инвариантная, следовательно, не инвариантна и метрика ρ''. Далее[6]

$$\rho^\mu(\varphi_n^\#, \varphi^\#) = \rho^\mu((1+n^{-1})\chi_T h, \chi_T h) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

$$\rho^\mu(\omega_n^\#, \omega^\#) = \rho^\mu(-(1-n^{-1})\chi_T h, -\chi_T h) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

$$\rho^\mu(\varphi_n^\# + \omega_n^\#, \varphi^\# + \omega^\#) = \rho^\mu(2n^{-1}\chi_T h, \chi_\varnothing h) \xrightarrow[n\to\infty]{} 2^{-1}\mu(T),$$

$$\rho^\mu(n^{-1}\varphi_n^\#, 0\cdot\varphi^\#) = \rho^\mu((n^{-1} + n^{-2})\chi_T h, \chi_\varnothing h) \xrightarrow[n\to\infty]{} 2^{-1}\mu(T),$$

откуда заключаем, что операции (сложения векторов и умножения их на скаляр) векторного пространства **П** не являются непрерывными в топологии, индуцированной метрикой $\rho'' = \rho' + \rho^\mu$.

Следствие 2. *Пусть* $\mathbf{П}^*$ *– конечномерное подпространство в* **П**, *тогда*

(i) *метрическое пространство* ($\mathbf{П}^*$, ρ'') *полное, при этом класс фундаментальных последовательностей из* ($\mathbf{П}^*$, ρ'') *содержится (строго) в классе последовательностей Коши пространства* ($\mathbf{П}^*$, $\mathcal{T}$), *где* $\mathcal{T}$ *– топология, индуцированная в* $\mathbf{П}^*$ *из пространства* $(\mathrm{L}_2(T, \mu, X), \|\cdot\|_2) \times (H_2, \|\cdot\|_H)$;

(ii) *если* $\mathbf{П}^* \subset \mathbb{E}^\#$, *то метрика* ρ'' *будет инвариантной, а топология* $\mathcal{T}^*$ *в* $\mathbf{П}^*$, *порождаемая* ρ'', *векторной, при этом* $\mathcal{T}^* = \mathcal{T}$, $\Psi[\mathbf{П}^*]$ *– компакт в метрическом пространстве* $(\mathrm{L}(T, \mu, R), \rho)$.

Доказательство. Положение (i) вытекает из теоремы 15 [17, с. 65], тогда как пункт (ii) – прямое следствие предложения 2 [18, с. 53] и теоремы 2 [4].

Теорема 1. *Если выполнены условия пункта* (ii) *следствия 2, то справедливо утверждение*:

$$\exists\, \sup\nolimits_{\mathrm{L}}\Psi[\mathbf{П}^*] \Leftrightarrow \rho(\sup\nolimits_{\mathrm{L}} W_n, \sup\nolimits_{\mathrm{L}} W_m) \xrightarrow[n,\, m\to\infty]{} 0,$$

где $W_n := \cup\{V_j: j = 1, \dots, n\}$, $\{V_j\}_{j = 1, 2, \dots}$ *– счетное семейство конечных* j^{-1}*-сетей в* $\Psi[\mathbf{П}^*]$.

Замечание 2. Пусть $W_n = \{\xi_1,\dots,\xi_k\}$, тогда $\sup_{\mathrm{L}} W_n = \xi_1 \vee\dots\vee \xi_k$, где $\xi' \vee \xi'' := 2^{-1}(\xi' + \xi'' + |\xi' - \xi''|)$.

[6] Для метрического пространства (**П**, ρ') см. предложение 2 [18, с. 53], а также пример 2 [18, с. 63].

Доказательство теоремы 1. (Установление …⇒…). Ясно, что множество $W_\infty := \cup\{V_j: j = 1, 2, \dots\}$ всюду плотно в $\Psi[\mathbf{П}^*]$, причем, очевидно (в силу исходного условия для …⇒… и теоремы 17 [17, с. 68]), существует $\sup_{\mathrm{L}} W_\infty \in \mathrm{L}(T, \mu, R)$. Таким образом, достаточно показать, что

$$\rho(\sup\nolimits_{\mathrm{L}} W_n, \sup\nolimits_{\mathrm{L}} W_m) \le \rho(\sup\nolimits_{\mathrm{L}} W_n, \sup\nolimits_{\mathrm{L}} W_\infty) + \rho(\sup\nolimits_{\mathrm{L}} W_m, \sup\nolimits_{\mathrm{L}} W_\infty) \xrightarrow[n,\, m\to\infty]{} 0.$$

Рассуждаем от противного: пусть в $\{W_n\}_{n = 1, 2, \dots}$ найдется счетное подсемейство $\{W_k\}_{k\in \mathrm{K}}$, для которого $\forall k \in \mathcal{K}: \rho(\sup_{\mathrm{L}} W_k, \sup_{\mathrm{L}} W_\infty) \le \mathrm{const} = d_+$. Тогда, поскольку имеется монотонная цепь

$$\sup\nolimits_{\mathrm{L}} W_1 \le_{\mathrm{L}} \sup\nolimits_{\mathrm{L}} W_2 \le_{\mathrm{L}} \dots \le_{\mathrm{L}} \sup\nolimits_{\mathrm{L}} W_n \le_{\mathrm{L}} \sup\nolimits_{\mathrm{L}} W_{n+1} \le_{\mathrm{L}} \dots \le_{\mathrm{L}} \sup\nolimits_{\mathrm{L}} W_\infty,$$

то монотонность данной цепи влечет $\rho(\sup_{\mathrm{L}} W_n, \chi_\varnothing) \le \rho(\sup_{\mathrm{L}} W_{n+1}, \chi_\varnothing)$, откуда приходим к

$$\exists d \in (0, d_+]: \rho(\sup\nolimits_{\mathrm{L}} W_n, \sup\nolimits_{\mathrm{L}} W_\infty) \xrightarrow[n\to\infty]{} d,$$

что противоречит следующему равенству:

$$t \mapsto \sup\{\sup\nolimits_{\mathrm{L}} W_i(t): i = 1, 2, \dots\} = \sup\nolimits_{\mathrm{L}} W_\infty;$$

данное равенство означает поточечную сходимость $\{\sup_{\mathrm{L}} W_n\}$ к $\sup_{\mathrm{L}} W_\infty$, а значит и сходимость по мере μ, что, в свою очередь, равносильно сходимости $\rho(\sup_{\mathrm{L}} W_n, \sup_{\mathrm{L}} W_\infty) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

(Установление …⇐…). Доказательство прозрачно в силу положения

$$\chi_\varnothing \le_{\mathrm{L}} f,\ f \in \{\sup\nolimits_{\mathrm{L}} W_n: n = 1, 2, \dots\} \subset \mathrm{L}(T, \mu, R),$$

предложения 2 [18, с. 508] и теоремы 17 [17, с. 68]. Теорема полностью доказана. □

Теперь, вооружившись следствием 2 [1] и формулами (1)–(3) из [17, с. 646], обеспечивающих

$$\mathbb{B}_1(x) = \mathbb{B}_1\mathbb{B}^{-1}\mathbb{B}(x) \in \mathrm{L}_\infty(T, \mu, Z_1),\ \mathbb{B}_2(x, x) = \mathbb{B}_2(x, \cdot)\circ \mathbb{B}^{-1}\mathbb{B}(x) \in \mathrm{L}_\infty(T, \mu, Z_2),$$

где $\mathbb{B}$, $\mathbb{B}^{-1} \in L(X, X)$ и $x \in AC^1(T, X)$, сформулируем первый из главных результатов.

Теорема 2. *Пусть* $\{N_j: j = 1, \dots, k\}$ *– динамические процессы* (1), (2) *и* $Z_i = X$, $i = 1, 2$. *Тогда найдется линейный непрерывный оператор* $\mathbb{B}_1^+ \in \mathbb{L}(X, X)$ *для которого справедливо представление*:

$$\exists(B_{01}^*, B_{11}^*, B_{21}^*) \in \mathbf{L}_2:$$
$$A_2 d^2x_1/dt^2 + A_1 dx_1/dt + A_0 x_1 = B_{01}^* u_1 + B_{11}^*\mathbb{B}_1^+(x_1) + B_{21}^*\mathbb{O}(x_1, x_1),$$
$$(x_1, u_1, \mathbb{B}_1(x_1), \mathbb{B}_2(x_1, x_1)) = N_1;$$

……………………………………………………

$$\exists(B_{0k}^*, B_{1k}^*, B_{2k}^*) \in \mathbf{L}_2:$$
$$A_2 d^2x_k/dt^2 + A_1 dx_k/dt + A_0 x_k = B_{0k}^* u_k + B_{1k}^*\mathbb{B}_1^+(x_k) + B_{2k}^*\mathbb{O}(x_k, x_k),$$
$$(x_k, u_k, \mathbb{B}_1(x_k), \mathbb{B}_2(x_k, x_k)) = N_k; \tag{6}$$

где не исключается положение, когда

$$(B_{0i}^*, B_{1i}^*, B_{2i}^*) \neq (B_{0j}^*, B_{1j}^*, B_{2j}^*),\ i \neq j.$$

Подводя «промежуточный» итог, видим, что справедливо следующее утверждение.

Следствие 3. *Пусть* $\mathbb{B} \in \mathbb{L}(X, X)$ *имеет ограниченный обратный. Тогда решение задачи дифференциальной реализации* (3) *может строится, исходя из поведения динамических процессов вида*:

$$\tilde{N}_1 = (x_1, u_1, \mathbb{B}_1^+(x_1), \mathbb{O}(x_1, x_1)),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \tag{7}$$

$$\tilde{N}_k = (x_k, u_k, \mathbb{B}_1^+(x_k), \mathbb{O}(x_k, x_k)),$$

$$\mathbb{B}_1^+ = \mathbb{B}, \tilde{N}_+ := \cup_{j=1,\ldots,k} \tilde{N}_j.$$

3. СУЩЕСТВОВАНИЕ *L*-ИНВАРИАНТНОГО РЕГУЛЯТОРА В КОНСТРУКЦИЯХ ПОЛУАДДИТИВНОСТИ ОПЕРАТОРА РЕЛЕЯ–РИТЦА

Предмет этого раздела – разрешимость задачи реализации на нелинейных траекторных пучках (1), (2) оператор-функций *L*-инвариантного регулятора дифференциальной системы (3). Сформулируем её в виде компактной теоремы и её следствия – простые достаточные условия; все части их доказательств в сущности уже подготовлены нами, и осталось только соединить их вместе.

Теорема 3. *Пусть* $\tilde{N}_1$, $\tilde{N}_2$ *– динамические пучки* (6), (7). *Тогда задача* (3) *разрешима при* $k = 2$, *если оператор Релея–Ритца полуаддитивен с весом* p *на линейном многообразии* Span $\tilde{N}_1$ + Span $\tilde{N}_2$.

Замечание 3. Остается открытым вопрос об эквивалентности теоремы 3 теореме 3 [3] – решение задачи операторной реализации *L*-инвариантного регулятора в терминах угловой метрики подпространств гильбертова пространства. При этом теорема 3 указывает на значимость (в духе *a majore ad minus*) конструкции веса полуаддитивности оператора (4) при обсуждении вопроса о расширении пучков динамических процессов, допускающих реализацию (3), по существу попутно развивая качественную геометрическую теорию (в бесконечномерной постановке) векторных полей [11, с. 275], сопрягаемых с заданными полилинейными траекторными многообразиями, в частности, в постановке [19] с минимальной операторной нормой $\|\cdot\|_{\mathrm{L}}$ для оператор-функций $(B_0^+, \ldots, B_n^+) \in \mathbf{L}_2$ из (3).

Доказательство теоремы 3. Поскольку линейные оболочки Span $\tilde{N}_1$ и Span $\tilde{N}_2$ – поглощающие множества в себе, то в силу системы уравнений (2) теоремы 2 [3] найдутся две функции $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathrm{L}_2(T, \mu, R)$, для которых будут выполняться следующие два функциональных неравенства

$$\sup\nolimits_{\mathrm{L}}\Psi[\mathrm{Span}\,\tilde{N}_1] \leq_{\mathrm{L}} \varphi_1,\ \sup\nolimits_{\mathrm{L}}\Psi[\mathrm{Span}\,\tilde{N}_2] \leq_{\mathrm{L}} \varphi_2.$$

Выберем в многообразии Span $\tilde{N}_1$ + Span $\tilde{N}_2$ в качестве его поглощающего множества само это многообразие. Тогда в силу полуаддитивности Ψ (с весом p) на Span $\tilde{N}_1$ + Span $\tilde{N}_2$ получаем

$$\sup\nolimits_{\mathrm{L}}\Psi[\mathrm{Span}\,\tilde{N}_1 + \mathrm{Span}\,\tilde{N}_2] \leq_{\mathrm{L}}$$

$$\leq_{\mathrm{L}} p \sup\nolimits_{\mathrm{L}}\Psi[\mathrm{Span}\,\tilde{N}_1] + p \sup\nolimits_{\mathrm{L}}\Psi[\mathrm{Span}\,\tilde{N}_2] \leq_{\mathrm{L}} p\,(\varphi_1 + \varphi_2),$$

откуда, исходя из теоремы 2 [3], следует (с учетом Span $\tilde{N}_1 \cup \tilde{N}_2$ = Span $\tilde{N}_1$ + Span $\tilde{N}_2$ и пункта (ii) предложения 1), что множество процессов $N_1 \cup N_2$ (1) обладает дифференциальной реализацией (3).

Следствие 4. (i) *L-инвариантный регулятор дифференциальной системы* (3) *существуют, если*

$$\exists p \in [1, \infty), \forall \phi_1, \phi_2 \in \mathrm{Span}\,\tilde{N}_+ : \Psi(\phi_1 + \phi_2) \leq_{\mathrm{L}} p\,\Psi(\phi_1) + p\,\Psi(\phi_2).$$

При этом, если Span $\tilde{N}_+ \subset \mathbb{E}^{\#}$, dim Span $\tilde{N}_+ < \aleph_0$, *и* $\mathfrak{T}$ *– топология в* Span $\tilde{N}_+$, *индуцированная из пространства* $(\mathrm{L}_2(T, \mu, X), \|\cdot\|_2) \times (H_2, \|\cdot\|_H)$, *то справедливы дополнительные предложения*:

(ii) *сужение* $\Psi \mid (\mathrm{Span}\,\tilde{N}_+, \mathfrak{T})$ *непрерывно*;

(iii) $\Psi[\mathrm{Span}\,\tilde{N}_+]$ *– компакт в метрическом пространстве* $(\mathrm{L}_2(T, \mu, R), \rho)$, *причем*

$$\sup\nolimits_{\mathrm{L}}\Psi[\mathrm{Span}\,\tilde{N}_+] = \lim\nolimits_\rho \{\zeta_i\}_{i=1,2,\ldots} \in \mathrm{L}_2(T, \mu, R),$$

где $\zeta_i := \xi_1 \vee \ldots \vee \xi_{m(i)}$, $\{\xi_1, \ldots, \xi_{m(i)}\}$ *– некоторая (т.е. любая) конечная* i^{-1}*-сеть в* $\Psi[\mathrm{Span}\,\tilde{N}_+]$, $\lim_\rho\{\ldots\}$ *– предел* ρ*-фундаментальной последовательности*.

Замечание 4. В условиях предложения (iii) существует (см. теорему 17 [17, с. 68]) счетное $Q_+ \subset$ Span $\tilde{N}_+$ такое, что, функцию $\phi_+ := \sup_{\mathrm{L}}\Psi[\mathrm{Span}\,\tilde{N}_+]$ осуществляет следующая sup-конструкция:

$$t \mapsto \phi_+(t) = \sup\{\Psi(q, w)(t) \in R : (q, w) \in Q_+\}.$$

Замечание 5. Следствие 4 позволяет строить [2] алгебру динамических пучков с единицей N_+, все элементы которой обладают реализацией с дифференциальной моделью (3). При этом в силу теоремы 1 [3] вопрос об «индивидуальном» характеристическом признаке дифференциальной реализации (2) для каждого отдельного процесса N_j ($j = 1, \ldots, k$) конструктивно решается (посредством символьных вычислений) на k-семействе динамических процессов $N_j = \{(x, u, \mathbb{B}_1(x), \mathbb{B}_2(x, x))_j\}$:

$$\Psi((x, u, \mathbb{B}_1(x), \mathbb{B}_n(x, x))_j) \in \mathrm{L}_2(T, \mu, R),\ j = 1, \ldots, k.$$

Если данные включения (или некоторые из них) не выполняются, то можно ставить средствами компьютерной алгебры [21] задачу синтеза *PL*-форм $\mathbb{B}_i \in \mathbb{L}(X^i, Z_i)$, $i = 1, \ldots, n$ от функций $\varphi_{ip} : X \to X$, а также «источника» воздействия» $t \mapsto u^*(t)$, обеспечивающих означенные условия, т.е.

$$\Psi((x, u^*, \mathbb{B}_1(\varphi_{11}(x)), \ldots, \mathbb{B}_n(\varphi_{n1}(x), \ldots, \varphi_{nn}(x)))_i) \in \mathrm{L}_2(T, \mu, R),\ i = 1, \ldots, k.$$

Пример 2. Проиллюстрируем положения замечания 5, рассмотрев две конструкции – (a) и (b).

(a) Пусть $n = 2$, $T = [0, 10]$ и

$$Z_1 = Z_2 = Y = X, A_0 = A_1 = 0 \in L(X, X),$$

$$A_2 = \mathbb{B}_1 = \mathrm{id}_X, \mathbb{B}_2 = \langle\cdot,\cdot\rangle_X e,$$

где $\langle\cdot,\cdot\rangle_X$ – скалярное произведение в X, $e \in X$, $\|e\|_X =$

1, $t \mapsto x(t) = (t\sin t)e$, $t \mapsto u(t) = 0 \in \mathrm{L}_2(T, X)$. В данной постановке структура *BL*-формы из (1) будет иметь вид $\mathbb{B}_2(x, x) = \langle x, x\rangle_X e$.

Тогда (см. Рис. 1) функция

$$f := \Psi((x, u, \mathbb{B}_1(x), \mathbb{B}_2(x, x))) = \\ = \| d^2x/dt^2 \|_X \, (\|x\|_X^2 + \|\mathbb{B}_2(x,x)\|_X^2)^{-1/2}$$

не принадлежит функциональному классу $\mathrm{L}_2(T, R)$) и, следовательно, согласно следствия 1, дифференциальная реализация (2) для неуправляемого процесса $(x, u, \mathbb{B}_1(x), \mathbb{B}_2(x, x))|_{u=0}$ *не существует*.

(b) Изменим постановку обратной задачи (a) тем, что примем $t \mapsto u^*(t) = (t\sin^2 t + 2^{-1} t^2 \sin 2t + \cos t)e$. Тогда (см. Рис. 2) с учетом выбора (в контексте замечания 2) *BL*-формы вида $\mathbb{B}_2(x, dx/dt) = \langle x, dx/dt\rangle_X e$ приходим к следующему значению оператора Релея–Ритца (3) [1]:

$$f := \Psi((x, u^*, \mathbb{B}_1(x), \mathbb{B}_2(x, dx/dt))) = \\ = \| d^2x/dt^2 \|_X \, (\|x\|_X^2 + \|\mathbb{B}_2(x, dx/dt)\|_X^2 + \|u^*\|_Y^2)^{-1/2} \in \\ \mathrm{L}_2(T, R),$$

и значит, билинейная дифференциальная реализация второго порядка для управляемого динамического процесса $(x, u^*, \mathbb{B}_1(x), \mathbb{B}_2(x, dx/dt))$ *существует*; нетрудно установить, что

$$d^2x/dt^2 = -x - 2\mathbb{B}_2(x, dx/dt) + 2u^*.$$

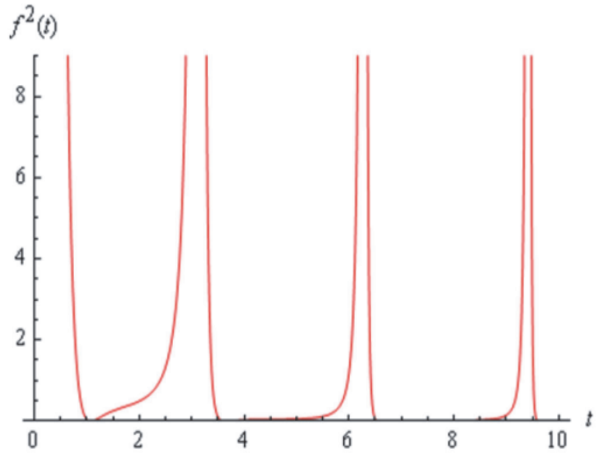

Рис. 1. $f^2(t) = (2\cos t - t\sin t)^2\,((t\sin t)^2 + (t\sin t)^4)^{-1}$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Современная теория дифференциальной реализации в сепарабельном гильбертовом пространстве достигла того наиболее естественного уровня общности, который позволяет излагать её принципы и математические конструкции с наибольшей прозрачностью, одновременно обеспечивая им максимально широкое приложение к концепциям общей теории обратных задач математической физики [10]. Такое глубокое развитие теории реализации бесконечномерных динамических систем во многом было достигнуто посредством введения функционального оператора Релея–Ритца [16]. Конструкция данного оператора и её многочисленные модификации сыграли значительную роль в качественном становлении дифференциальной реализации как самостоятельной вполне оригинальной математической теории, которая выделяется не только своей внутренней цельностью и простотой, но и новыми приложениями в качественной теории обратных задачах системного анализа [22]. С её помощью были получены яркие теоретико-системные результаты, при этом технический уровень исследований и их интенсивность значительно выросли. Надо отметить, что это не сопровождалось ростом разобщенности данных теоретических изысканий и потерей естественности в математических постановках их теоретико-прикладных задач, напротив, глубокий качественный результат из одной области исследований проливал, как правило, новый свет на другие разделы, подчеркивая их органичное единство.

В настоящей работе изучение тополого-алгебраических свойств оператора Релея–Ритца велось в свете представлений о геометрии бесконечномерных нестационарных билинейных векторных полей [11]. На этой методологической базе выше исследованы вопросы разрешимости обратной задачи в области реализации *L*-инвариантного регулятора (реализации *принципа суперпозиции*)[7] нестационарной дифференциальной системы второго порядка (в частности гиперболической), содержащей в качестве допустимых решений конечное семейство фиксированных, не ограниченных по мощности, программно-позиционно траекторных пучков в сепарабельном гильбертовом пространстве.

В развитие подобных исследований отметим, что более общий случай, когда семейство моделируемых управляемых траекторных пучков лежит в равномерно выпуклом банаховом пространстве [18] и мощность семейства пучков $\geq \aleph_0$, – значительно

[7] Термин «*принцип суперпозиции*» заимствован из квантовой механики, при этом в квантовой механике «суперпозиция» означает, что пространство состояний динамической системы является линейным, тогда как в теории систем «суперпозиция» дополнительно предполагает, что зависимость *выходных* величин от *входных* воздействий суть линейная [24, с. 18]. Данный принцип можно привлечь в расширении метода «*квазилинеаризации*» [24, с. 168] при решении задачи оптимального управления по технологии последовательных приближений, известной также как метод Пикара [24, с. 173].

сложнее. В качестве подзадачи он по существу содержит геометрическую теорию замкнутых расчленяемых диэдров банахова пространства [9], которая еще недостаточно разработана. При этом необходимо учесть, что в данном контексте не продуктивно делать изначальное допущение (см. доказательство теоремы 1 [23]), что любое замкнутое подпространство исследуемого банахова пространства дополняемо, поскольку тогда это пространство фактически будет изоморфно некоторому гильбертову пространству (теорема 3 [17, с. 203]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Данеев, А.В.* О реализации принципа суперпозиции для конечного пучка траекторных кривых билинейной системы второго порядка. I. / А.В. Данеев, В.А. Русанов, П.А. Плеснев // Известия Самарского научного центра РАН. – 2022. – Т. 24. – № 1. – С. 59-66
2. *Русанов, В.А.* Об одной алгебре множеств динамических процессов, обладающей дифференциальной реализаций в гильбертовом пространстве / В.А. Русанов // Доклады РАН. – 2010. – Т. 433. – № 6. – С. 750-752.
3. *Rusanov V.A., Daneev A.V., Lakeyev A.V., Linke Yu.E.* On solvability of the identification-inverse problem for operator-functions of a nonlinear regulator of a nonstationary hyperbolic system // Advances in Differential Equations and Control Processes 2015. Vol. 16. No. 2. P. 71-84.
4. *Лакеев А.В.*К дифференциальной реализации билинейной системы второго порядка в гильбертовом пространстве / А.В. Лакеев, Ю.Э. Линке, В.А. Русанов // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2019. – Т. XXII. – № 2. – С. 27-36.
5. *Данеев, А.В.* От реализации Калмана-Месаровича к линейной модели нормально- гиперболического типа / А.В. Данеев, В.А. Русанов, М.В. Русанов // Кибернетика и системный анализ. – 2005. – № 6. – С. 137-157.
6. *Chen Y.* A new one-parameter inhomogeneous differential realization of the spl(2,1) superalgebra // International Journal of Theoretical Physics. 2012. Vol. 51. No. 12. P. 3763-3768.
7. *Rusanov V.A., Daneev A.V., Lakeyev A.V., Sizykh V.N.* Higher-order differential realization of polylinear-controlled dynamic processes in a Hilbert space // Advances in Differential Equations and Control Processes. 2018. Vol. 19. No. 3. P. 263-274.
8. *Рид, М.* Методы современной математической физики. Том 1. Функциональный анализ / М. Рид, Б. Саймон. – М.: Мир, 1977. – 560 с.
9. *Массера, Х.Л.* Линейные дифференциальные уравнения и функциональные пространства / Х.Л. Массера, Х.Х. Шеффер. – М.: Мир, 1970. - 456 с.
10. *Кабанихин, С.И.* Обратные и некорректные задачи / С.И. Кабанихин. – Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2009. – 458 с.
11. Новиков, С.П. Современные геометрические структуры и поля / С.П. Новиков, И.А. Тайманов. – М.: МЦНМО, 2014. – 584 с.
12. *Rusanov V.A., Banshchikov A.V., Daneev A.V., Lakeyev A.V.* Maximum entropy principle in the differential second-order realization of a nonstationary bilinear system // Advances in Differential Equations and Control Processes. 2019. Vol. 20. No. 2. P. 223-248.
13. *Barbu V.* Nonlinear Semigroups and Differential Equations in Banach Space. Leyden. Ncordhoff International Publishing, 1976. 352 p.
14. *Русанов, В.А.* К геометрическим основам дифференциальной реализации динамических процессов в гильбертовом пространстве / В.А. Русанов, А.В. Данеев, Ю.Э. Линке // Кибернетика и системный анализ. – 2017. – Т. 53. – № 4. – С. 71-83.
15. *Келли, Дж.Л.* Общая топология / Дж.Л. Келли. – М.: Наука, 1981. – 432 с.
16. *Лакеев, А.В.* Метрические свойства оператора Релея-Ритца / А.В. Лакеев, Ю.Э. Линке, В.А. Русанов // Известия вузов. Математика. – 2022. – № 9. – С. 54-63.
17. *Канторович, Л.В.* Функциональный анализ / Л.В. Канторович, Г.П. Акилов. – М.: Наука, 1977. – 744 с.
18. *Иосида, К.* Функциональный анализ / К. Иосида. – М.: Мир, 1967. – 624 с.
19. *Rusanov V.A., Antonova L.V., Daneev A.V., Mironov A.S.* Differential realization with a minimum operator norm of a controlled dynamic process // Advances in Differential Equations and Control Processes. 2013. Vol. 11. No. 1. P. 1-40.
20. *Эдвардс, Р.* Функциональный анализ: Теория и приложения / Р. Эдвардс. – М.: Мир, 1969. – 1072 с.
21. *Банщиков, А.В.* Символьные вычисления в моделировании и качественном анализе динамических систем / А.В. Банщиков, Л.А. Бурлакова, В.Д. Иртегов, Т.Н. Титоренко // Вычислительные технологии. – 2014. – Т. 19. – № 6. – С. 3-18.
22. *Русанов, В.А.* К оптимизации процесса юстировки модели дифференциальной реализации многомерной системы второго порядка / В.А. Русанов, А.В. Данеев, Ю.Э. Линке // Дифференциальные уравнения. – 2019. – Т. 55. – № 10. – С. 1432-1438.
23. *Rusanov V.A., Daneev A.V., Lakeev A.V., Linke Yu.E.* On the differential realization theory of nonlinear dynamic processes in Hilbert space // Far East Journal of Mathematical Sciences. 2015. Vol. 97. No. 4. P. 495-532.
24. *Калман, Р.* Очерки по математической теории систем / Р. Калман, П. Фалб, М. Арбиб. – М.: Мир, 1971. – 400 с.

ON THE IMPLEMENTATION OF THE SUPERPOSITION PRINCIPLE FOR A FINITE BEAM OF INTEGRAL CURVE OF A SECOND-ORDER BILINEAR SYSYTEM

© 2023 A.V. Daneev[1], R.A. Daneev[2], A.V. Lakeev[3], V.A. Rusanov[3], Y.D. Aksenov[1]

[1] Irkutsk State Transport University, Irkutsk, Russia
[2] East Siberian Institute of the Ministry of Internal Affairs of Russia, Irkutsk, Russia
[3] Institute of Dynamics and Control Theory, Irkutsk, Russia

For a finite family of controllable integral curves of the "trajectory, software-positional control" type induced in a separable Hilbert space by a certain second-order bilinear unsteady differential system (for example, hyperbolic), but with different bilinear regulators (with different operator co-efficients with a single bilinear form of these regulators), we investigated solvability of the imple-mentation of operator functions of an invariant linear regulator, in the presence of which (in the structure of this differential system) the union of these integral curves represents a family of its admissible solutions. The study is based on the analysis of continuity and semi-additivity of the nonlinear Rayleigh-Ritz functional operator. A numerical illustrative example is given.
Keywords: inverse problems of dynamics, hyperbolic system, Rayleigh-Ritz operator, L-invariant controller.

DOI: 10.37313/1990-5378-2023-25-6-125-134
EDN: BQFPTY

REFERENCES

1. *Daneev, A.V.* O realizacii principa superpozicii dlya konechnogo puchka traektornyh krivyh bilinejnoj sistemy vtorogo poryadka. I. / A.V. Daneev, V.A. Rusanov, P.A. Plesnev. // Izvestiya Samarskogo nauchnogo centra RAN. – 2022. – T. 24. – № 1. – S. 59-66
2. *Rusanov, V.A.* Ob odnoj algebre mnozhestv dinamicheskih processov, obladayushchej differencial'noj realizacij v gil'bertovom prostranstve / V.A. Rusanov // Doklady RAN. – 2010. – T. 433. – № 6. - C. 750-752.
3. *Rusanov V.A., Daneev A.V., Lakeyev A.V., Linke Yu.E.* On solvability of the identification-inverse problem for operator-functions of a nonlinear regulator of a nonstationary hyperbolic system // Advances in Differential Equations and Control Processes 2015. Vol. 16. No. 2. P. 71-84.
4. *Lakeev A.V.* K differencial'noj realizacii bilinejnoj sistemy vtorogo poryadka v gil'bertovom prostranstve / A.V. Lakeev, Yu.E. Linke, V.A. Rusanov // Sibirskij zhurnal industrial'noj matematiki. – 2019. – T. XXII. – № 2. – S. 27-36.
5. *Daneev, A.V.* Ot realizacii Kalmana-Mesarovicha k linejnoj modeli normal'no- giperbolicheskogo tipa / A.V. Daneev, V.A. Rusanov, M.V. Rusanov // Kibernetika i sistemnyj analiz. – 2005. – № 6. – S. 137-157.
6. *Chen Y.* A new one-parameter inhomogeneous differential realization of the spl(2,1) superalgebra // International Journal of Theoretical Physics. 2012. Vol. 51. No. 12. P. 3763-3768.
7. *Rusanov V.A., Daneev A.V., Lakeyev A.V., Sizykh V.N.* Higher-order differential realization of polylinear-controlled dynamic processes in a Hilbert space // Advances in Differential Equations and Control Processes. 2018. Vol. 19. No. 3. P. 263-274.
8. *Rid, M.* Metody sovremennoj matematicheskoj fiziki. Tom 1. Funkcional'nyj analiz / M. Rid, B. Sajmon. – M.: Mir, 1977. – 560 s.
9. *Massera, H.L.* Linejnye differencial'nye uravneniya i funkcional'nye prostranstva / H.L. Massera, H.H. SHeffer. – M.: Mir, 1970. – 456 s.
10. *Kabanihin, S.I.* Obratnye i nekorrektnye zadachi / S.I. Kabanihin. – Novosibirsk: Sibirskoe nauchnoe izdatel'stvo, 2009. – 458 s.
11. *Novikov, S.P.* Sovremennye geometricheskie struktury i polya / S.P. Novikov, I.A. Tajmanov. – M.: MCNMO, 2014. – 584 s.
12. *Rusanov V.A., Banshchikov A.V., Daneev A.V., Lakeyev A.V.* Maximum entropy principle in the differential second-order realization of a nonstationary bilinear system // Advances in Differential Equations and Control Processes. 2019. Vol. 20. No. 2. P. 223-248.
13. *Barbu V.* Nonlinear Semigroups and Differential Equations in Banach Space. Leyden. Ncordhoff International Publishing, 1976. 352 p.
14. *Rusanov, V.A.* K geometricheskim osnovam differencial'noj realizacii dinamicheskih processov v gil'bertovom prostranstve / V.A. Rusanov, A.V. Daneev, YU.E. Linke // Kibernetika i sistemnyj analiz. – 2017. – T. 53. – № 4. – S. 71-83.
15. *Kelli, Dzh.L.* Obshchaya topologiya / Dzh.L. Kelli. – M.: Nauka, 1981. – 432 s.
16. *Lakeev, A.V.* Metricheskie svojstva operatora Releya-Ritca / A.V. Lakeev, YU.E. Linke, V.A. Rusanov // Izvestiya vuzov. Matematika. – 2022. – № 9. – S. 54-63.
17. *Kantorovich, L.V.* Funkcional'nyj analiz / L.V. Kantorovich, G.P. Akilov. – M.: Nauka, 1977. – 744 c.
18. *Iosida, K.* Funkcional'nyj analiz / K. Iosida. – M.: Mir, 1967. – 624 c.
19. *Rusanov V.A., Antonova L.V., Daneev A.V., Mironov A.S.* Differential realization with a minimum operator norm of a controlled dynamic process // Advances in Differential Equations and Control Processes. 2013. Vol. 11. No. 1. P. 1-40.
20. *Edvards, R.* Funkcional'nyj analiz: Teoriya i prilozheniya / R. Edvards. – M.: Mir, 1969. – 1072 s.
21. *Banshchikov, A.V.* Simvol'nye vychisleniya v modelirovanii i kachestvennom analize dinamicheskih sistem / A.V. Banshchikov, L.A. Burlakova, V.D. Irtegov, T.N. Titorenko // Vychislitel'nye tekhnologii. – 2014. – T. 19. – № 6. – S. 3-18.
22. *Rusanov, V.A.* K optimizacii processa yustirovki modeli differencial'noj realizacii mnogomernoj sistemy vtorogo poryadka / V.A. Rusanov, A.V. Daneev, Yu.E. Linke // Differencial'nye uravneniya. - 2019. – T. 55. – № 10. – S. 1432-1438.
23. *Rusanov V.A., Daneev A.V., Lakeev A.V., Linke Yu.E.* On the differential realization theory of nonlinear dynamic processes in Hilbert space // Far East Journal of Mathematical Sciences. 2015. Vol. 97. No. 4. P. 495-532.
24. *Kalman, R.* Ocherki po matematicheskoj teorii sistem / R. Kalman, P. Falb, M. Arbib. – M.: Mir, 1971. – 400 s.

Aleksey Daneev, Doctor of Technical Sciences, Professor of the Department of Information Systems and Information Security. E-mail: daneev@mail.ru
Roman Daneev, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Information Technologies. E-mail: romasun@mail.ru
Lakeev Anatoly, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Head of Department at the Institute of Dynamics and Control Theory of the SB RAS.
Vyacheslav Rusanov, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Senior Researcher at the Institute of Dynamics and Control Theory of the SB RAS. E-mail: v.rusanov@mail.ru
Yuri Aksenov, Graduate Student of IrGUPS.
E-mail: aksen991304@gmail.com