

АППРОКСИМАЦИЯ ТЕЧЕНИЯ СЛОЯ ОГРАНИЧЕННОЙ ТОЛЩИНЫ МНОГОСВЯЗНОГО КОНТУРА СО-ВОКУПНОСТЬЮ ТЕЧЕНИЙ ОДНОСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЕЙ

© 2023 Е. А. Яновская

Московский государственный технологический университет «СТАНКИН»

Статья поступила в редакцию 27.10.2023

В основу расчетов положена предложенная Ильюшиным А.А. теория течения в тонком пластическом слое, заключенного между двумя сближающимися по заданному закону поверхностями тел инструмента в предположении, что: материал растекающегося слоя идеально-пластический и объемно-несжимаемый; упругие деформации инструмента малы и ими можно пренебречь; на поверхностях контакта металла слоя с инструментом принимается классический закон течения Прандтля Л. Для исследования особенностей течения используется известная краевая задача в постановке «идеальной жидкости», которая описывается нелинейными дифференциальными уравнениями первого порядка в частных производных относительно контактного давления и компонент вектора скорости течения. В общем случае исследуемые величины представляют собой сложные функции, зависящие от формы очага деформации, величины контактного давления в рассматриваемой точке поверхности контакта, наличия, состава и способа нанесения смазки, величины шероховатости контактирующих поверхностей и других факторов. В работе предлагается метод решения задач течения пластических слоев в новой постановке. С помощью предложенного математического аппарата построены алгоритм решения и компьютерная модель течения.

Ключевые слова: тонкий слой; давление на контакте; силы деформирования; кинематические параметры; компьютерное моделирование

DOI: 10.37313/1990-5378-2023-25-6-139-147

EDN: CGRBGD

Краевая задача формулируется в соответствии с моделью «идеальной жидкости», что позволяет составить систему нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка в частных производных относительно контактного давления и компонент вектора скорости течения вдоль плоскости течения [3-7].

Рассматривая многосвязную область, четверть которой показана на рис. 1, убеждаемся в предсказуемости перемещений материальных точек металла деформируемого слоя при затекании в контурное ребро: от жестких границ инструмента в направлении ребра [8, 9].

Оси выбранной системы координат совпадают с секущими плоскостями симметрии, одновременно являясь линиями раздела течения. Указанную четверть многосвязной области разобьем, как показано на рис. 1, на подобласти с характерным течением металла деформируемого тонкого слоя, введя обозначения S11, S12, S13 – имеющие одинаковую толщину h1, а также подобласти S21, S22, S23 с толщиной h2 соответственно. Прямолинейные границы подобластей упрощают задание краевых условий на этих

Яновская Елена Александровна, кандидат технических наук, доцент кафедры прикладной математики. E-mail: elena_yanovskaya@bk.ru

границах. В научных публикациях [8-13] при участии автора рассмотрены подобные краевые задачи, на которых в данной работе останавливаться не будем.

Наиболее сложная в математическом описании модель течения реализуется в односвязной переходной области S13 пластического слоя, при рассмотрении которой удобно перейти к полярной системе координат с дополнительным разбиением этой области на три подобласти, обозначив их соответственно S131, S132, S133, т.е. рассматриваемая локальная область является объединением указанных подобластей.

Выделенная область S13 ограничена прямолинейными участками и дугами окружностей радиусами r2 и r3, как показано на рис. 2. Для нахождения решения краевой задачи представим область исследования S13 следующим набором подобластей:

Переменные параметры в полярной системе координат, участвующие в описании границ подобластей, составляющих S13, описаны неравенствами (1):

$$S_{131} = \left\{ (\rho, \varphi): \begin{array}{l} r_2 \leq \rho \leq \frac{b}{\sin \varphi} \\ \arctg \frac{(a - a_1) - (r_3 - r_1)}{b - r_1} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \end{array} \right.,$$

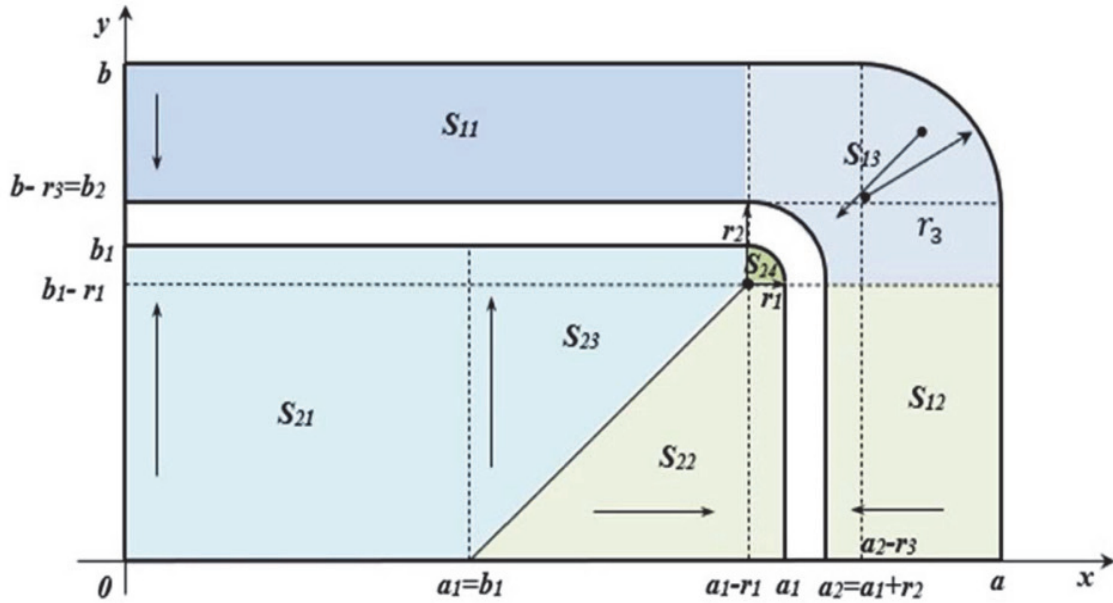


Рисунок 1. Обобщенная расчетная схема

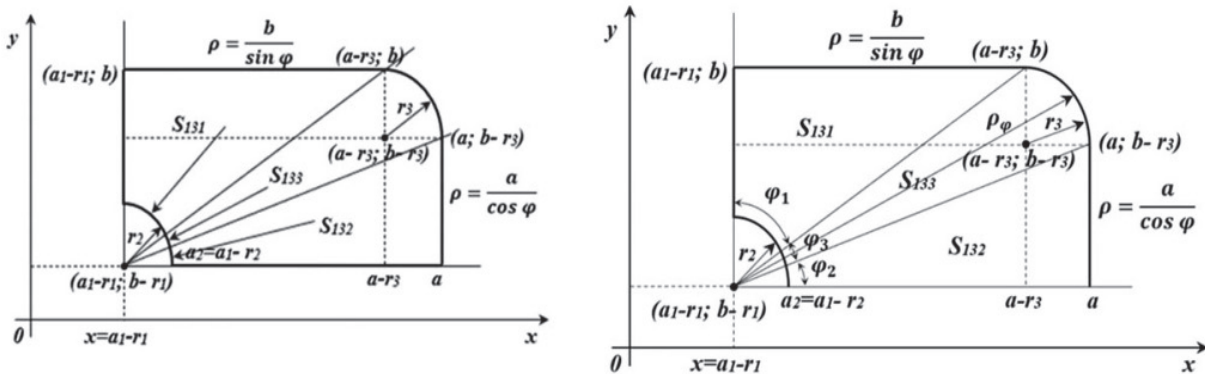
$$S_{132} = \left\{ (\rho, \varphi): \begin{array}{l} r_2 \leq \rho \leq \frac{a}{\cos \varphi} \\ 0 \leq \varphi \leq \arctg \frac{b-r_3}{a-(a_1-r_1)} \end{array} \right. , \quad (1)$$

$$S_{133} = \left\{ (\rho, \varphi): \begin{array}{l} r_2 \leq \rho \leq \rho_\varphi \\ \arctg \frac{b-r_3}{a-(a_1-r_1)} \leq \varphi \leq \arctg \frac{(a-a_1)-(r_3-r_1)}{b-r_1} \end{array} \right. .$$

Функция для определения радиуса ρ_φ была вычислена отдельно, уравнение которой в полярной системе координат имеет вид (2):

$$\rho_\varphi = (a-r_3)\cos\varphi + (b-r_3)\sin\varphi + \sqrt{\left((a-r_3)\cos\varphi + (b-r_3)\sin\varphi \right)^2 - \left((a-r_3)^2 + (b-r_3)^2 - r_3^2 \right)}. \quad (2)$$

Очевидно, что конец радиуса-вектора ρ_φ описывает криволинейный участок границы, как показано на рис. 2 б.



а)

б)

Рисунок 2. Схема разбиения подобласти S_{15} :

а – направления течения материала; б – геометрические параметры подобласти

Уравнения краевой задачи (3) и (4) в рассматриваемой подобласти в полярной системе координат запишутся:

$$\frac{\partial p}{\partial \rho} = -\frac{2\tau_s}{h_1} \frac{v_\rho}{\sqrt{v_\rho^2 + v_\varphi^2}}; \quad (3)$$

$$\frac{\partial p}{\rho \partial \varphi} = -\frac{2\tau_s}{h_1} \frac{v_\varphi}{\sqrt{v_\rho^2 + v_\varphi^2}}, \quad (4)$$

где p – давление на контактной поверхности; τ_s – напряжение сдвига; h_1 – толщина слоя в подобласти; v_ρ и v_φ – радиальная и угловая компоненты скорости течения. Линии тока образуют пучок прямых с центром в точке с координатами $(a - r_1, b - r_1)$.

Условие несжимаемости в полярной системе координат примет вид (5):

$$\frac{\partial v_\rho}{\partial \rho} + \frac{v_\rho}{\rho} + \frac{\partial v_\varphi}{\rho \partial \varphi} - \frac{d\lambda}{dt} = 0, \quad (5)$$

где $\lambda(t) = \ln\left(\frac{h_0}{h_1(t)}\right)$ – степень деформации по Ильюшину А.А.,

$$\frac{d\lambda}{dt} = -\frac{1}{h_1(t)} \cdot \frac{dh_1}{dt}.$$

Заметим, что угловая компонента вектора скорости $v_\varphi \equiv 0$ во всей области S_{13} . Это означает, что условие несжимаемости будет иметь вид

$$\frac{\partial v_\rho}{\partial \rho} + \frac{v_\rho}{\rho} + \frac{1}{h_1(t)} \cdot \frac{dh_1}{dt} = 0. \quad (6)$$

Граничные условия в подобласти S_{131} запишем в следующем виде:

$$\text{при } \rho = \frac{b}{\sin\varphi}, v_\varphi = 0; \text{ при } \rho = 0, p = 2\tau_s. \quad (7)$$

Используя приведенные граничные условия, найдем решение исходной системы (4) - (5), имеющей в этой подобласти следующий вид:

$$\frac{\partial p}{\partial \rho} = -\frac{2\tau_s}{h_1}; \quad \frac{\partial p}{\rho \partial \varphi} = 0. \quad (8)$$

Находим давление на контактной поверхности в рассматриваемой подобласти

$$p_{S_{131}} = 2\tau_s - \frac{2\tau_s}{h_1}(x - a_0). \quad (9)$$

Компоненту вектора скорости течения в направлении радиуса находим из условия несжимаемости (6):

$$v_\rho = -\frac{1}{2h_1(t)} \frac{dh_1}{dt} \left(\frac{b^2}{\rho \sin^2\varphi} + \rho \right). \quad (10)$$

Подставив найденные величины в (11), окончательно получим уравнение (12)

$$P_{S_{131}} = \left(1 + \frac{r_2}{h_1}\right) b^2 \frac{b_1 - r_1}{(a - a_1) - (r_3 - r_1)} - \frac{2\tau_s}{3h_1} b^2 \left(\frac{(b_1 - r_1) \sqrt{(b_1 - r_1)^2 + ((a - a_1) - (r_3 - r_1))^2}}{((a - a_1) - (r_3 - r_1))^2} + \right. \\ \left. + \frac{3}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{1}{2} \arctg \frac{(a - a_1) - (r_3 - r_1)}{b_1 - r_1} \right| \right) - \tau_s r_2^2 \left(\frac{\pi}{2} - \arctg \frac{(a - a_1) - (r_3 - r_1)}{b_1 - r_1} \right) + \\ + \frac{2\tau_s r_2^3}{h_1} \left(\frac{\pi}{2} - \arctg \frac{(a - a_1) - (r_3 - r_1)}{b_1 - r_1} \right). \quad (12)$$

Перейдем к рассмотрению пластической подобласти S_{132} с границами (1):

Краевые условия в этой подобласти принимают вид:

$$\rho = \frac{a}{\cos\varphi}, v_\rho = 0; \quad (13)$$

при $\rho = r_2, p = 2\tau_s$.

Используя приведенные граничные условия (13), найдем решение исходной системы (4) – (5), имеющей в этой области следующий вид:

$$\frac{\partial p}{\partial \rho} = -\frac{2\tau_s}{h_1}; \quad \frac{\partial p}{\rho \partial \varphi} = 0. \quad (14)$$

Решив систему (14), после нахождения постоянной интегрирования, получаем давление на контактной поверхности:

$$p = 2\tau_s - \frac{2\tau_s}{h_1}(\rho - r_2). \quad (15)$$

решением которого будет радиальная компонента вектора скорости:

$$v_\rho = -\frac{\rho}{2h_1} \frac{dh_1(t)}{dt} \left(\frac{a^2}{\rho \cos^2 \varphi} + \rho \right). \quad (16)$$

Силу деформирования, приходящуюся на подобласть S_{132} , найдем двойным интегрированием вычисленного контактного давления:

$$P_{S_{132}} = \iint_{S_{132}} p_{S_{132}} \rho \, d\rho \, d\varphi. \quad (17)$$

Поставив найденные величины в (17), окончательно получим

$$P_{S_{132}} = \tau_s a^2 \frac{b-r_3}{a-(a_1-r_1)} - \frac{2\tau_s}{h_1} - \frac{2\tau_s a^3}{h_1} \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2a-(a_1-r_1)} \frac{b-r_3}{a-(a_1-r_1)} \sqrt{1 + \left(\frac{b-r_3}{a-(a_1-r_1)} \right)^2} + \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\operatorname{arctg} \frac{b-r_3}{a-(a_1-r_1)}}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| \right) + \frac{\tau_s r_2 a^2}{h_1} \frac{b-r_3}{a-(a_1-r_1)} - \tau_s r_2^2 \operatorname{arctg} \frac{b-r_3}{a-(a_1-r_1)} + \frac{2\tau_s r_2^3}{h_1} \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{b-r_3}{a-(a_1-r_1)} - \frac{\tau_s r_2^3}{h_1} \operatorname{arctg} \frac{b-r_3}{a-(a_1-r_1)}. \quad (18)$$

Перейдем к рассмотрению пластической подобласти S_{133} с границами (1):

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_\varphi, \quad v_\rho = 0; \\ \rho &= r_2, \quad p = 2\tau_s, \end{aligned} \quad (19)$$

где ρ_φ описывается уравнением (2).

Используя приведенные граничные условия (19), найдем решение исходной системы (4) - (5). Вычислив постоянную интегрирования, получим давление на контактной поверхности

$$p_{133} = 2\tau_s - \frac{2\tau_s}{h_1}(\rho - r_2). \quad (20)$$

Из условия несжимаемости (6) можно найти радиальную компоненту вектора скорости течения

$$v_\rho = -\frac{\rho}{2h_1} \frac{dh_1(t)}{dt} \left(\frac{\rho_\varphi^2}{\rho} - \rho \right). \quad (21)$$

Силу деформирования, приходящуюся на подобласть S_{133} , определим согласно уже рассмотренного алгоритма:

$$P_{S_{133}} = \iint_{S_{133}} p_{S_{133}} \rho \, d\rho \, d\varphi.$$

После интегрирования и подстановки пределов интегрирования получаем значение для силы деформирования данной подобласти

$$P_{S_{133}}^{(1)} = \left(\operatorname{arctg} \frac{(a-a_1)-(r_3-r_1)}{b_1-r_1} - \operatorname{arctg} \frac{b-r_3}{a-(a_1-r_1)} \right) \cdot \left(\left(\tau_s + \frac{\tau_s r_2}{h_1} \right) (2(a-r_3)^2 + 2(b-r_3)^2 - 2r_3^2 - r_2^2) - \frac{2\tau_s}{3h_1} (2\sqrt{2}((a-r_3)^3 + (b-r_3)^3 - 2r_3^3) - r_2^3) \right). \quad (22)$$

Необходимо заметить, что выражение (22) дает приближенное значение для силы деформирования в подобласти. Такой результат можно считать допустимым для инженерных расчетов в силу малости этой области. В реальных поковках эта область может вырождаться в линию раздела течений [14, 15].

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ПРОЦЕССА ИЗГОТОВЛЕНИЯ ПЛОСКОГО ФЛАНЦА С КОНТУРНЫМ РЕБРОМ

Для моделирования рассматриваемого процесса было принято решение использовать *Web* технологии:

- *HTML* - язык разметки;
- *CSS* – формальный язык для описания внешнего вида интерфейса;
- *Javascript* – язык программирования;
- библиотека *P5.js* – *JS* библиотека для создания интерактивных визуальных элементов с помощью кода в *Web* браузере;
- *sublime text 3* – продвинутый текстовый редактор;
- браузер *Google*.

Такой выбор обосновывается тем, что с помощью *HTML* и *CSS* можно прописать актуальный интерфейс для всей программы. *Javascript* поддерживает всю логику передачи и обработки данных, а также достаточно удобен для описания математического аппарата рассматрива-

емого процесса. *JS* библиотека *P5.js* используется для построения визуализации изучаемого объекта. Используемая библиотека позволяет отображать задаваемые параметры формы поковки (длины сторон, углы, скругления, ширина канала и т.п. рис. 3), а также в реальном времени отслеживать особенности поведения слоя материала при изготовлении сложного фланца и перемещение частиц слоя металла поковки с определенными скоростями, что соответствует формоизменению, происходящему в слое.

ПРОЦЕСС ВИЗУАЛИЗАЦИИ ТЕЧЕНИЯ ТОНКОГО СЛОЯ МЕЖДУ СБЛИЖАЮЩИМИСЯ ПОВЕРХНОСТЯМИ

На поверхность заготовки наносится равномерная сетка из конечного количество частиц, которые составляют слой поковки (рис. 4).

Количество частиц можно задать любое внутри программы, в пределах используемой модели, помня об ограничениях, чтобы не перегружать процессор. Каждая частица представляет собой единичный экземпляр общего класса частиц с набором известных свойств: физических, химических, механических, которые определяют состав, состояние и поведение частицы деформируемого слоя (например, начальное положение, характер движения, скорость, температуру). Известно, что перемещение любой материальной точки слоя в плоскости, перпендикулярной к действию внешней силы, про-

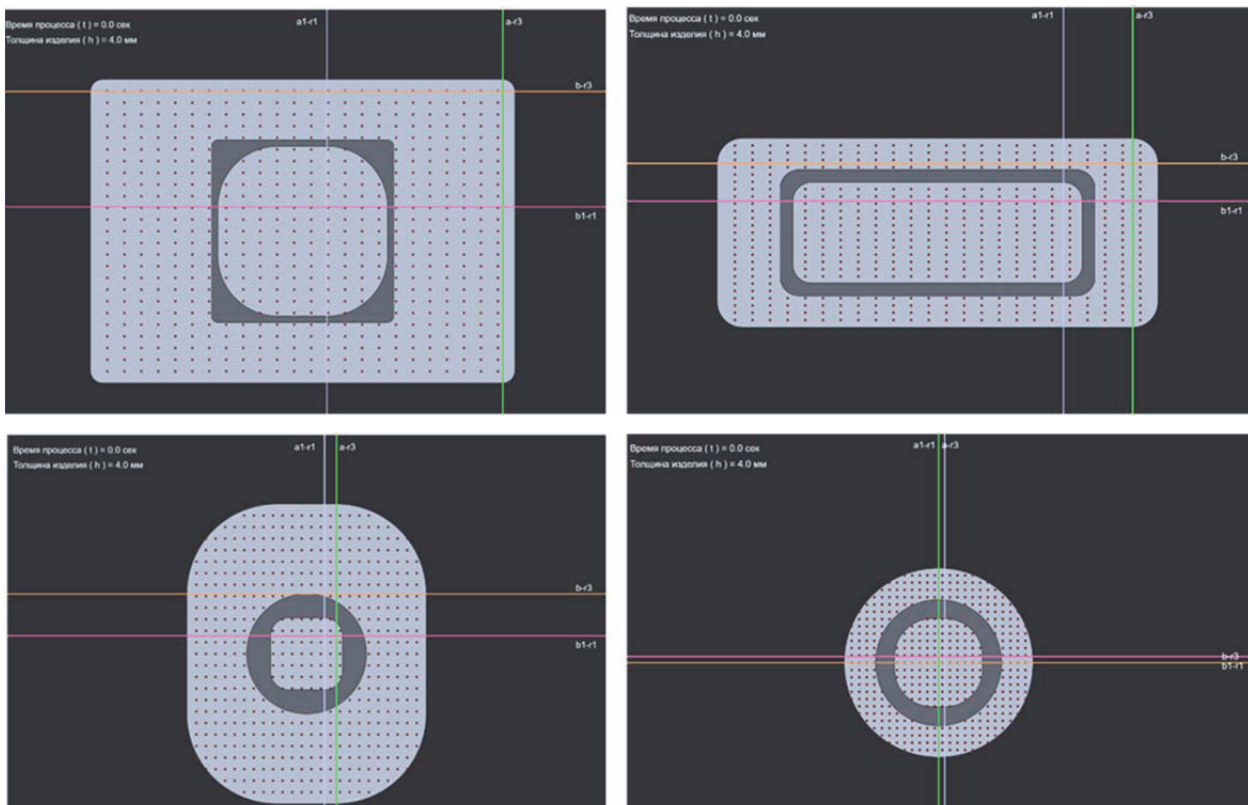


Рис. 3. Отображения возможных форм поковки фланца

исходит по кратчайшей нормали к периметру сечения [15-17]. Здесь красные линии, «тянущиеся» за частицами представляют собой траектории их движения, которые можно интерпретировать как линии тока при стационарном движении [18].

С течением времени цвет канала контурного ребра постепенно приобретает цвет заготовки, сигнализируя о затекании металла поковки в канал матрицы и о заполнении этого канала (рис. 6).

Скорость перемещения частиц задается с помощью построенной математической модели, в зависимости от расположения частиц в подобласти. Продолжительность процесса и текущая толщина заготовки меняются дискретно, как показано на рис. 7.

Представленные аналитическое решение и моделирование процесса течения численными методами с помощью разработанной компьютерной программы позволяют, с учетом начальной формы поковки, в реальном времени анализировать процесс течения слоев плоского фланца с затеканием металла в контурные ре-

бра, рассчитывать время процесса и технологические параметры: контактное давление, силу деформирования, необходимую для начала процесса течения, компоненты вектора скорости течения.

Для компьютерного моделирования составлен необходимый алгоритм и написана программа, средствами которой строится модель течения пластического слоя поковки фланца при различных вводимых параметрах. Вариативность исходных данных позволяет рассчитать по программе параметры типовых технологических процессов, предназначенных для получения поволоков разных форм и размеров, что может помочь технологу оценить результаты при выборе рационального варианта технологии.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А. А. Ильюшин / Proceedings (1946 - 1966). Т.2. Plasticity / Compiled by E. A. Ilyushina, M. R. Korotkina. FIZMATLIT, Moscow, 2004.
2. L. Prandtl/ Proc. Ist. Int. Congr. App. Mech., Delft, 43. 1924.
3. E. N. Sosenushkin, V. A. Kadymov, E. A. Yanovskaya,

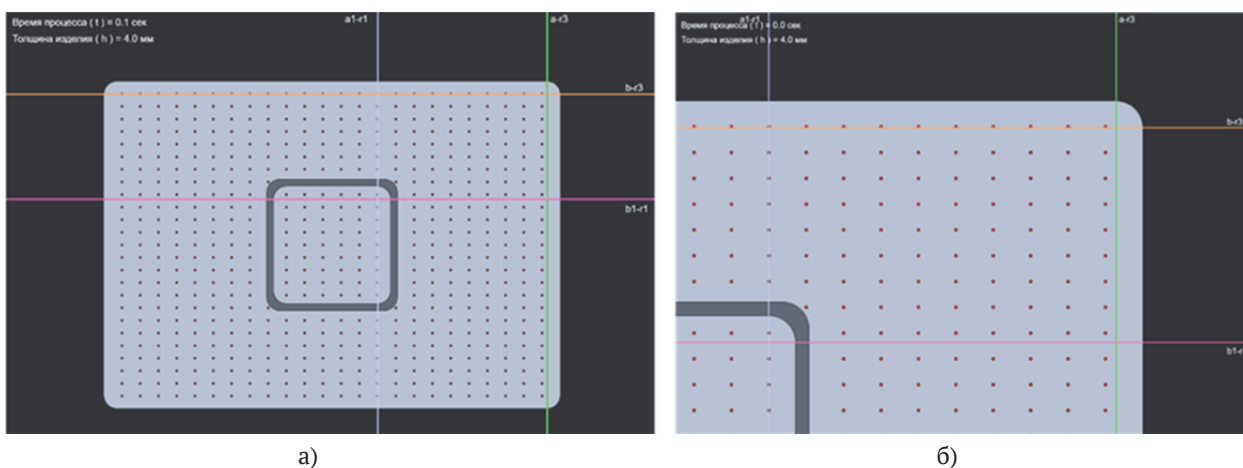


Рис. 4. Модели отображения частиц слоя:
а – для всей области; б – для выделенной подобласти

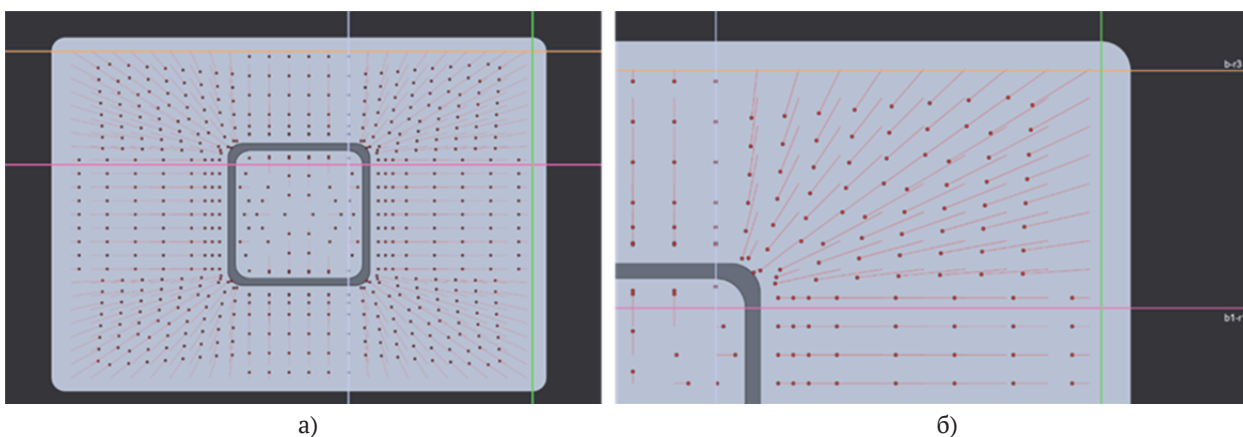


Рис. 5. Течение слоёв металла поковки согласно принципу кратчайшей нормали к периметру при формоизменении заготовки:
а – многосвязная область фланца; б – четверть рассматриваемой многосвязной области фланца

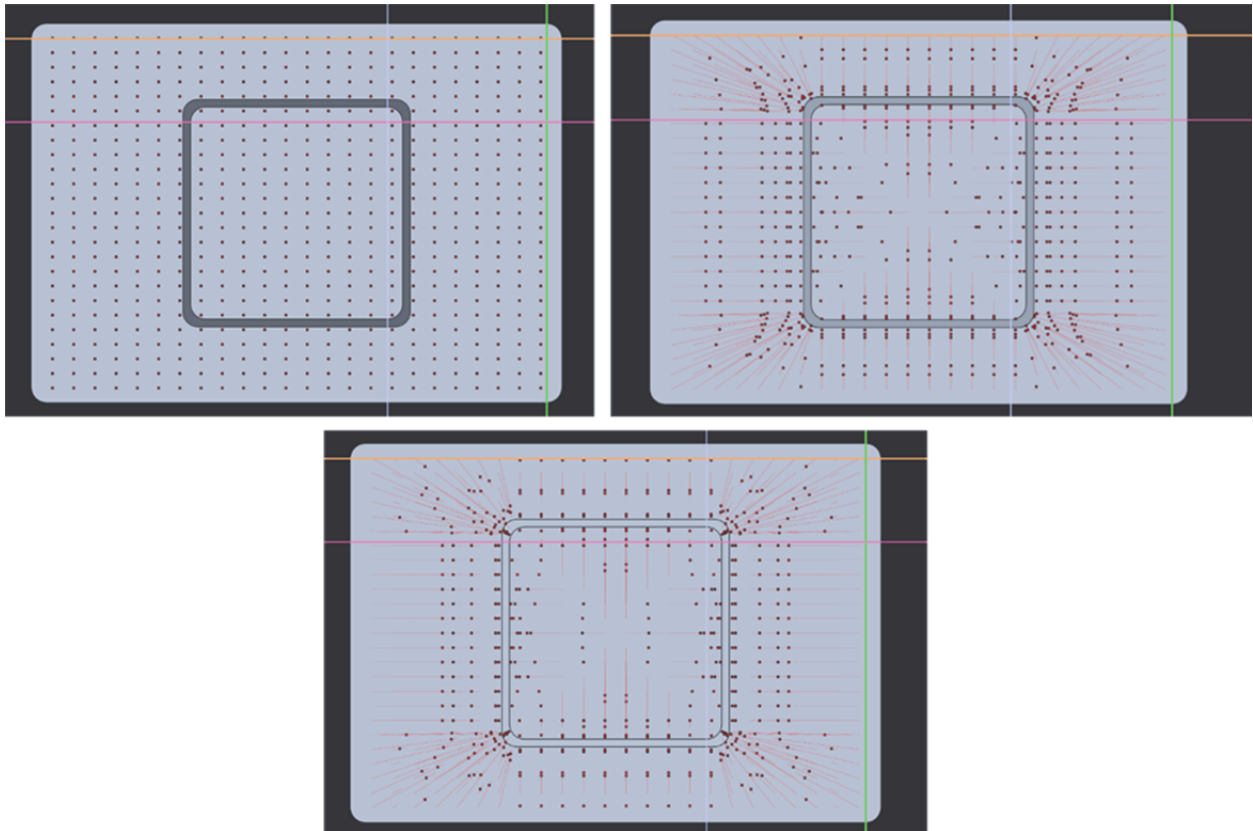


Рис. 6. Этапы заполнения материальными частицами деформируемого металла заготовки канала матрицы

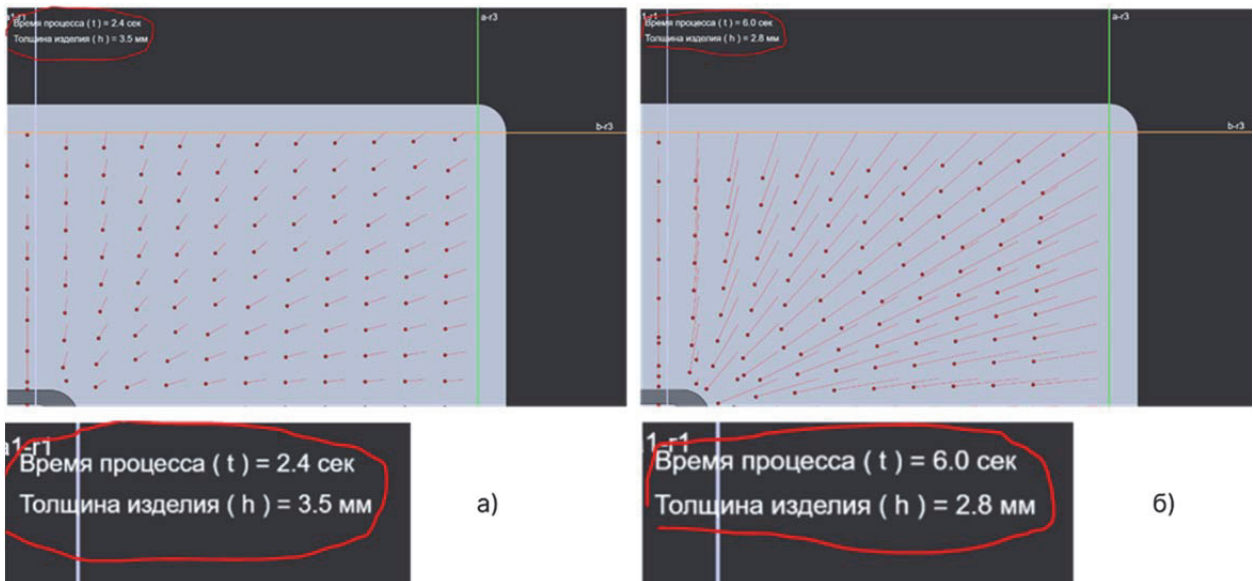


Рис. 7. Процесс сжатия пластического слоя:

а - время с начала сжатия = 2,4 сек; текущая толщина поковки = 3,5 мм;
 б - время с начала сжатия = 6 сек; текущая толщина поковки = 2,8 мм

4. Кийко, И. А. О форме пластического слоя, сжимаемого параллельными плоскостями/ И. А. Кийко // Прикладная математика и механика. – 2011. – Т. 75. – Вып. 1. – С. 15 – 26.
5. E. N. Sosenushkin, V. A. Kadymov, E. A. Yanovskaya, T. V. Gureeva. Aluminum alloy extrusion mechanics when forging a forging with longitudinal ribs, Non-ferrous metals. – №3. – 2019. С.58–64.
6. Кадымов, В. А. Контактная задача о несвободном растекании пластического слоя на плоскости: эксперимент и теория/ В. А. Кадымов, Е. Н. Сосенушкин, Н. А. Белов // Сб. науч. трудов Упругость

- и неупругость. – М.: МГУ, 2016. – С.180–185.
7. Сосенушкин, Е. Н. Математическое моделирование штамповки прямоугольного фланца с выдавливанием выступа / Е. Н. Сосенушкин, Е. А. Яновская, А. А. Архипов // Вестник МГТУ «Станкин». – № 4 (51). – 2019. – С. 65 – 70.
 8. V.A. Kadymov, E.N. Sosenushkin, E.A. Yanovskaya. Contact Problems of Plastic Flow in a Thin Layer: Theory, Analysis of Solutions, and Applications, Journal of Machinery Manufacture and Reliability. 51, 3 (2022) 206-215.
 9. V. A. Kadymov, E. N. Sosenushkin, E. A. Yanovskaya. Exact Solutions to an Evolution Equation of Plastic Layer Flow on a Plane. Moscow University Mechanics Bulletin. Allerton Press. Inc. 71 (3) (2016) 69-72.
 10. Кадымов, В. А. Эксперименты по стесненной осадке тонкого пластического слоя прямоугольной формы / В. А. Кадымов, Е. Н. Сосенушкин, Е. А. Яновская // Моделирование нелинейных процессов и систем. – С. 130 – 136. Материалы шестой международной конференции. – М.: Янус-К, 2023. – 338 с.
 11. V. A. Kadymov. Modeling of the stamping process of box-type forging / V. A. Kadymov, E.N. Sosenushkin, E.A. Yanovskaya / Web of Conf. ICSSMSTE 2020, № 315, Yalta, 01 July, 2020 // <https://www.matec-conferences.org/articles/mateconf/abs/2020/11/contents/contents.html> (дата обращения 14.10.2023).
 12. Сосенушкин, Е. Н. Пластическое течение в тонком слое: теория, математические модели, анализ решений и их приложения / Монография / Е. Н. Сосенушкин, Е. А. Яновская. – М.: Янус-К, 2023. – 208 с.
 13. Кадымов, В. А. Эксперименты по стесненной осадке тонкого пластического слоя прямоугольной формы / В. А. Кадымов, Е. Н. Сосенушкин, Е. А. Яновская // Моделирование нелинейных процессов и систем. – С. 130 – 136. Материалы шестой международной конференции. – М.: Янус-К, 2023. – 338 с.
 14. Соломонов, К. Н. Методика построения линии раздела течения металла в процессах осадки плоских заготовок / К. Н. Соломонов, Н. И. Федоринин, Л. И. Тищук // Вестник научно-технического развития. – № 2. – 2016. – С. 36-55.
 15. Сторожев, М. В. Теория обработки металлов давлением / М. В. Сторожев, Е. А. Попов. – М.: Машиностроение, 1977. – 423 с.
 16. Теория обработки металлов давлением: учебник для вузов / В. А. Голенков, С. П. Яковлев, С. А. Головин и др. / Под ред. В. А. Голенкова, С. П. Яковлева. – М.: Машиностроение, 2013. – 442 с.
 17. Кучеряев, Б. В. Механика сплошных сред. Теоретические основы обработки композитных материалов с задачами и решениями, примерами и упражнениями / Б. В. Кучеряев. – М.: МИСиС, 2006. – 604 с.
 18. V. M. Greshnov. Physical and mathematical theory of large irreversible deformations, Fizmatlit, Moscow, 2018.

APPROXIMATION OF THE FLOW OF A LAYER OF LIMITED THICKNESS OF A MULTI-CONNECTED CONTOUR BY A COLLECTION OF FLOW OF SINGLE-CONNECTED AREAS

© 2023 E. A. Yanovskaya

Moscow State Technological University "STANKIN"

The calculations are based on the one proposed by A.A. Ilyushin. theory of flow in a thin plastic layer, enclosed between two surfaces of tool bodies approaching according to a given law, under the assumption that: the material of the spreading layer is ideally plastic and volumetrically incompressible; elastic deformations of the tool are small and can be neglected; on the contact surfaces of the metal layer with the tool, the classical L. Prandtl flow law is accepted. To study the characteristics of the flow, we use the well-known boundary value problem in the "ideal fluid" formulation, which is described by nonlinear first-order partial differential equations with respect to the contact pressure and components of the flow velocity vector. In the general case, the quantities under study are complex functions that depend on the shape of the deformation zone, the magnitude of the contact pressure at the considered point of the contact surface, the presence, composition and method of applying a lubricant, the roughness of the contacting surfaces and other factors. The paper proposes a method for solving problems of flow of plastic layers in a new formulation. Using the proposed mathematical apparatus, a solution algorithm and a computer model of the flow were constructed.

Keywords: thin layer; contact pressure; deformation forces; kinematic parameters; computer modelling

DOI: 10.37313/1990-5378-2023-25-6-139-147

EDN: CGRBGD

REFERENCES

1. A. A. Ilyushin / Proceedings (1946 - 1966). T.2. Plasticity / Compiled by E. A. Ilyushina, M. R. Korotkina. FIZ-MATLIT, Moscow, 2004.
2. L. Prandtl / Proc. Ist. Int. Congr. App. Mech., Delft, 43. 1924.
3. E. N. Sosenushkin, V. A. Kadymov, E. A. Yanovskaya, A. A. Arkhipov, T.V. Gureeva, D. S. Gusev, M. V. Prokin. Development of the

- theory of flow of a plastically deformable layer, Bulletin of the Tula State University. Technical science. 5 (2019) 131-138.
4. Kijko, I. A. O forme plasticheskogo sloya, szhimaemogo parallel'nymi ploskostyami/ I. A. Kijko // Prikladnaya matematika i mekhanika. – 2011. – T. 75. – Vyp. 1. – S. 15 – 26.
 5. E. N. Sosenushkin, V. A. Kadymov, E. A. Yanovskaya, T. V. Gureeva. Aluminum alloy extrusion mechanics when forging a forging with longitudinal ribs, Non-ferrous metals. – №3. – 2019. S.58–64.
 6. Kadymov, V. A. Kontaktnaya zadacha o nesvobodnom rastekanii plasticheskogo sloya na ploskosti: eksperiment i teoriya/ V. A. Kadymov, E. N. Sosenushkin, N. A. Belov // Sb. nauch. trudov Uprugost' i neupru-gost'. – M.: MGU, 2016. – S.180–185.
 7. Sosenushkin, E. N. Matematicheskoe modelirovanie shtampovki pryamougol'nogo flanca s vydavlivaniem vystupa/ E. N. Sosenushkin, E. A. Yanovskaya, A. A. Arhipov // Vestnik MGTU «Stankin». – №4 (51). – 2019. – S. 65 – 70.
 8. V.A. Kadymov, E.N. Sosenushkin, E.A. Yanovskaya. Contact Problems of Plastic Flow in a Thin Layer: Theory, Analysis of Solutions, and Applications, Journal of Machinery Manufacture and Reliability. 51, 3 (2022) 206-215.
 9. V. A. Kadymov, E. N. Sosenushkin, E. A. Yanovskaya. Exact Solutions to an Evolution Equation of Plastic Layer Flow on a Plane. Moscow University Mechanics Bulletin. Allerton Press. Inc. 71 (3) (2016) 69-72.
 10. Kadymov, V. A. Eksperimenty po stesnennoj osadke tonkogo plasticheskogo sloya pryamougol'noj formy/ V. A. Kadymov, E. N. Sosenushkin, E. A. Yanovskaya // Modelirovanie nelinejnyh processov i sistem. – S. 130 – 136. Materialy shestoj mezhdunarodnoj konferencii. – M.: YAnus-K, 2023. – 338 s.
 11. V. A. Kadymov. Modeling of the stamping process of box-type forging/ V. A. Kadymov, E.N. Sosenushkin, E.A. Yanovskaya/ Web of Conf. ICSSMSTE 2020, № 315, Yalta, 01 July, 2020 // <https://www.matec-conferences.org/articles/mateconf/abs/2020/11/contents/contents.html> (data obrashcheniya 14.10.2023).
 12. Sosenushkin, E. N. Plasticheskoe techenie v tonkom sloe: teoriya, matematicheskie modeli, analiz reshenij i ih prilozheniya/ Monografiya / E. N. Sosenushkin, E. A. Yanovskaya. – M.: Yanus-K, 2023. – 208 s.
 13. Kadymov, V. A. Eksperimenty po stesnennoj osadke tonkogo plasticheskogo sloya pryamougol'noj formy/ V. A. Kadymov, E. N. Sosenushkin, E. A. Yanovskaya // Modelirovanie nelinejnyh processov i sistem. – S. 130 – 136. Materialy shestoj mezhdunarodnoj konferencii. – M.: YAnus-K, 2023. – 338 s.
 14. Solomonov, K. N. Metodika postroeniya linii razdela techeniya metalla v processah osadki ploskih zagotovok/ K. N. Solomonov, N. I. Fedorinin, L. I. Tishchuk // Vestnik nauchno-tehnicheskogo razvitiya. – № 2. – 2016. – C. 36-55.
 15. Storozhev, M. V. Teoriya obrabotki metallov davleniem / M. V. Storozhev, E. A. Popov. – M.: Mashinostroenie, 1977. – 423 s.
 16. Teoriya obrabotki metallov davleniem: uchebnik dlya vuzov / V. A. Golenkov, S. P. YAKovlev, S. A. Golovin i dr./ Pod red. V. A. Golenkova, S. P. YAKovleva. – M.: Mashinostroenie, 2013. – 442 s.
 17. Kucheryaev B. V. Mekhanika sploshnyh sred. Teoreticheskie osnovy obrabotki kompozitnyh materialov s zadachami i resheniyami, primerami i uprazhneniyami/ B. V. Kucheryaev. – M.: MISiS, 2006. – 604 s.
 18. V. M. Greshnov. Physical and mathematical theory of large irreversible deformations, Fizmatlit, Moscow, 2018.