

УДК 539.3

ЛИНЕЙНО-ПЕРИОДИЧЕСКИЕ КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ ГЕРЦА ДЛЯ УПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

© 2025 Д.А. Пожарский, Е.Д. Пожарская

Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону

Статья поступила в редакцию 23.03.2025

Рассматриваются пространственные контактные задачи для упругого полупространства, когда одна или две бесконечные периодические цепочки жестких штампов выстроены вдоль прямой линии. Задачи обобщают классическую контактную задачу Герца для единичного эллиптического штампа на упругом полупространстве, которая имеет точное решение. В линейно-периодическом случае суперпозиция ядер интегрального уравнения контактной задачи Герца дает сходящийся ряд гармонического типа. Следуя идее Е.А. Кузнецова о введении дополнительных (относительных) смещений, проводится регуляризация ядра путем добавления заданных периодических систем сосредоточенных сил (с тем же периодом, что и системы штампов), симметричных относительно систем штампов. Векторная сумма сил, приложенных к штампам, и дополнительных сил вне области контакта должна быть равна нулю. Это приводит к сходящимся рядам в ядрах интегральных уравнений. При неизвестных областях контакта для численного решения применяется метод Б.А. Галанова с введением специальных нелинейных операторов, позволяющий одновременно определить область контакта и контактные давления путем итераций по ньютоновской схеме для нелинейных интегральных уравнений типа Гаммерштейна. Нелинейность задач связана с тем, что область контакта заранее неизвестна и определяется из условия равенства нулю контактного давления на ее границе, что даже в задаче Герца приводит к нелинейной зависимости между характеристиками контакта. Рассматриваются системы штампов в форме эллиптических параболоидов. Рассчитаны области контакта, а также интегральные характеристики контакта (вдавливающие силы) в зависимости от осадки штампов и от расстояния между цепочками штампов и дополнительных сил. Для отладки программы используется точное решение задачи Герца. Показано, что для достаточно вытянутых вдоль оси цепочки штампов при усилении контакта (увеличении осадки штампов) наблюдается перколяция (слияние дискретных зон контакта) с образованием непрерывной бесконечно длинной зоны контакта.

Ключевые слова: упругое полупространство, периодическая контактная задача, интегральные уравнения, регуляризация, численный метод.

DOI: 10.37313/1990-5378-2025-27-2-132-138

EDN: HXLBNN

*Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда
№ 24-21-00014, <https://rscf.ru/project/24-21-00014/>*

1. ВВЕДЕНИЕ

Исследование периодических контактных задач, как и задач дискретного контакта, может иметь практическое применение при моделировании текстурированных поверхностей после лазерной обработки и анализе их на прочность [1-10]. Одним из основных подходов для решения указанных задач служит метод локализации, разработанный академиком И.Г. Горячевой [2,6-8]. К факторам, ограничивающим его применимость, можно отнести то, что он предназначен для систем круговых инденторов, расположенных специальным образом (по круговым орбитам), а при сближении инденторов его эффективность снижается [11]. Использовался асимптотический метод [3], а также численный метод нелинейных граничных интегральных уравнений [9,10,12]. Для линейных цепочек штампов на упругом полупространстве и клине сходимости ядра интегрального уравнения контактной задачи можно обеспечить, закрепив часть границы тела жесткой заделкой [9,10]. В настоящей статье сходимости достигается за счет дополнительных периодических систем сосредоточенных сил, приложенных симметрично относительно областей контакта так, что суммарная действующая на тело сила нулевая. Этот прием эквивалентен введению относительных смещений [1,11].

Пожарский Дмитрий Александрович, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной математики. E-mail: pozharda@rambler.ru

*Пожарская Елизавета Дмитриевна, ассистент кафедры информационных технологий.
E-mail: pozhashkaya.elizaveta@rambler.ru*

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим упругое полупространство $z \leq 0$, материал которого характеризуется модулем сдвига G и коэффициентом Пуассона ν . Изучим периодические контактные задачи о линейных цепочках одинаковых жестких штампов (период $2l$, оси цепочек параллельны оси y), внедренных при $z=0$ на величину d без перекоса. В задаче А имеем одну цепочку (рис. 1), а в задаче В – две, расстояние между осями которых $2h$ (рис. 2). Задачи симметричны по координатам x и z . К штампам в центрах их симметрии приложены нормальные силы P . Суперпозиция фундаментальных решений [13] дает бесконечное смещение границы упругого тела, поэтому требуется регуляризация. Для этого к границе полупространства вне области контакта прикладываем дополнительные периодические системы сосредоточенных сил с тем же периодом, как показано на рис. 1 и 2, причем суммарная действующая на тело нормальная сила должна быть равна нулю. В силу периодичности и симметрии достаточно рассматривать единичную область контакта W , лежащую на полуоси $x^3 0$.

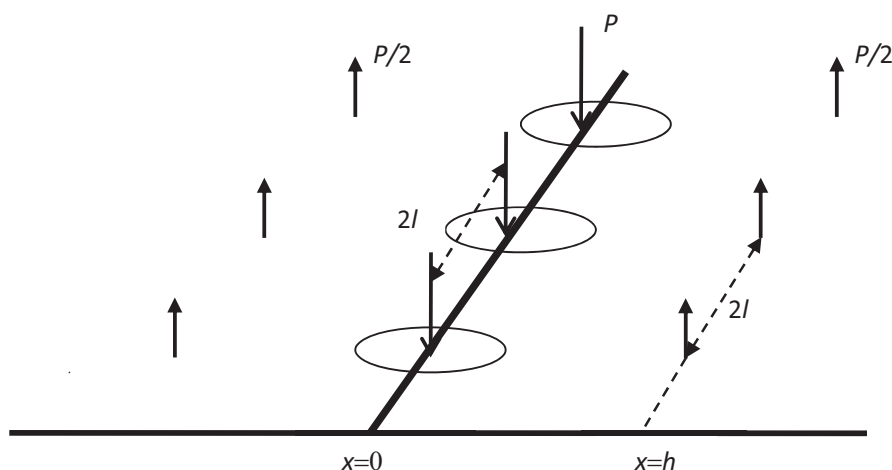


Рис. 1. Система штампов на полупространстве (задача А)

Пусть форма основания штампа в W (эллиптические параболоиды)

$$A) f(x, y) = \frac{x^2}{2R_1} + \frac{y^2}{2R_2}; \quad (1)$$

$$B) f(x, y) = \frac{(x-h)^2}{2R_1} + \frac{y^2}{2R_2}. \quad (2)$$

Граничные условия регуляризованных контактных задач имеют вид (W^* – объединенная область контакта)

$$z = 0: u_z - u_z^* = -(\delta - f(x, y)), \quad (x, y) \in \Omega^*; \quad (3)$$

$$\sigma_z = 0, \quad (x, y) \notin \Omega^*; \quad \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0. \quad (4)$$

Здесь u_z^* – упругое перемещение границы тела под действием дополнительных периодических систем нормальных сосредоточенных сил. При заданных величинах G, ν, l, d, h и функции $f(x, y)$ (1)–(2) требуется определить область контакта W и контактное давление $s_z(x, y, 0) = -q(x, y)$, $(x, y) \in \Omega$, затем при использовании условия равновесия штампа можно найти величину P :

$$\iint_{\Omega} q(x, y) dx dy = P. \quad (5)$$

На основании граничного условия (3) (условия контакта) получим интегральные уравнения задач А и В относительно $q(x, y)$ ($q = G/(1-\nu)$, $(x, y) \in \Omega$):

$$\iint_{\Omega} q(r, z) T(r, z, x, y) dr dz = 2\pi\theta[\delta - f(x, y)], \quad (6)$$

$$A) T(r, z, x, y) = \frac{1}{R} - \frac{0.5}{R_h} - \frac{0.5}{R_{-h}} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{R_k^+(r, z)} + \frac{1}{R_k^-(r, z)} - \frac{0.5}{R_k^+(h, 0)} - \right.$$

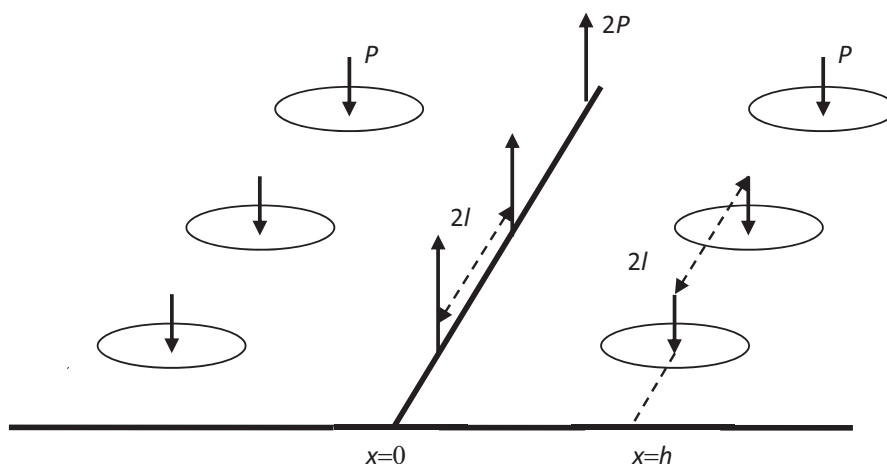


Рис. 2. Две системы штампов на полупространстве (задача В)

$$\left[-\frac{0.5}{R_k^-(h,0)} - \frac{0.5}{R_k^+(-h,0)} - \frac{0.5}{R_k^-(-h,0)} \right], \quad (7)$$

$$R = \sqrt{(x-r)^2 + (y-z)^2}, \quad (8)$$

$$R_{\pm h} = \sqrt{(x \mp h)^2 + y^2}, \quad (9)$$

$$R_k^{\pm}(r,z) = \sqrt{(x-r)^2 + (y-z \pm 2kl)^2}; \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \text{В) } T(r,z,x,y) = & \frac{1}{R} + \frac{1}{R_+} - \frac{2}{R_0} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{R_k^+(r,z)} + \frac{1}{R_k^-(r,z)} + \frac{1}{R_k^+(-r,z)} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{R_k^-(-r,z)} - \frac{2}{R_k^+(0,0)} - \frac{2}{R_k^-(0,0)} \right], \end{aligned} \quad (11)$$

$$R_+ = \sqrt{(r+x)^2 + (z-y)^2}, \quad (12)$$

$$R_0 = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (13)$$

3. ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД И РЕЗУЛЬТАТЫ

В задаче В перенесем начало координат в центр W при помощи замены $x_* = x - h$ (звездочку далее опускаем). Для решения задач А и В применим численный метод нелинейных интегральных уравнений Б.А. Галанова, в котором нелинейность связана с неизвестной областью контакта, на границе этой области давление обращается в нуль [12]. Метод позволяет одновременно определить контактные давления и область контакта. Заключим номинальную область W в прямоугольник $S = \{|x| \leq d, |y| \leq l\}$. Распространим в уравнении (6) интегрирование на S при учете, что $q(r,z)=0$ в области $S \setminus \Omega$. Введем интегральное неравенство отсутствия контакта в $S \setminus \Omega$ и условие неотрицательности $q(r,z)$ в Ω . При помощи специальных нелинейных операторов, позволяющих автоматически удовлетворить интегральное неравенство, систему интегральных уравнений и неравенств сведем к одному нелинейному уравнению, для решения которого применим модифицированный метод Ньютона. Граница контакта области W строится по точкам, в которых давление равно нулю. Для отладки берется точное решение контактной задачи Герца для единичного штампа [13].

Введем безразмерные обозначения (штрихи далее опускаем)

$$\begin{aligned} x' = \frac{x}{l}, \quad r' = \frac{r}{l}, \quad y' = \frac{y}{l}, \quad z' = \frac{z}{l}, \quad A_0 = \frac{l}{2R_1}, \quad B_0 = \frac{l}{2R_2}, \quad h' = \frac{h}{l}, \\ q'(x',y') = \frac{q(x,y)}{2\pi\theta}, \quad \varepsilon = \frac{d}{l}, \quad \delta' = \frac{\delta}{l}, \quad P' = \frac{P}{2\pi\theta l^2}, \quad S' \leftrightarrow S, \quad \Omega' \leftrightarrow \Omega. \end{aligned}$$

На рис. 3а для ядра (7) начерчена зависимость $P(h)$ при $\delta=A_0=B_0=\varepsilon=1$ (сплошная линия); пунктир для точного решения задачи Герца [13] (случай единичного штампа с ядром $1/R$). Для случая рис. 3а при $h \approx 2,2$ сила для цепочки штампов с симметричной пригрузкой совпадает с силой по решению Герца для единичного штампа. На рис. 3б для ядра (7) при $A_0=B_0=\varepsilon=1$ начерчены графики $P(\delta)$ для $h=2$ (сплошная линия) и $h=4$ (пунктир). На рис. 4 и 5 показаны границы четвертей областей контакта для ядра (7) при $A_0=B_0=\varepsilon=1$; рис. 4 для случая $\delta=0,5, h=2$ (сплошная линия) и $h=8$ (пунктир); рис. 5 для случая $h=4, \delta=0,7$ (сплошная линия) и $\delta=1$ (точки). Площадь области Ω возрастает при уменьшении h и увеличении δ .

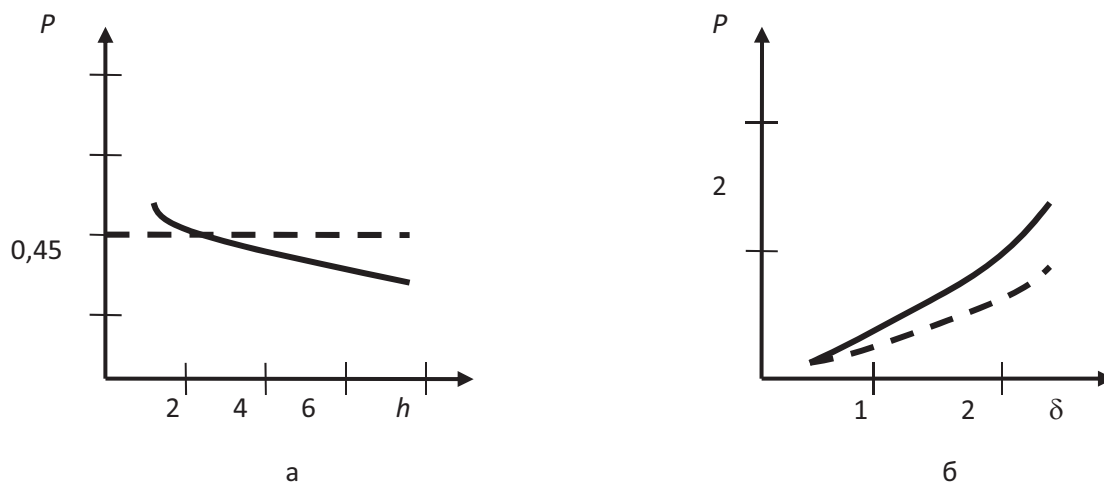


Рис. 3. Графики для ядра (7): (а) $P(h)$ при $\delta=A_0=B_0=\varepsilon=1$ (сплошная линия) и точное решение задачи Герца (пунктир) и (б) $P(\delta)$ при $A_0=B_0=\varepsilon=1, h=2$ (сплошная линия) и $h=4$ (пунктир)

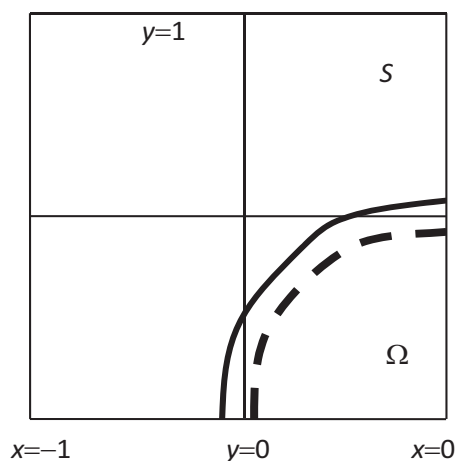


Рис. 4. Границы четвертей симметричных по x, y областей Ω (ядро (7)); $\delta=0,5, A_0=B_0=\varepsilon=1, h=2$ (сплошная линия) и $h=8$ (пунктир)

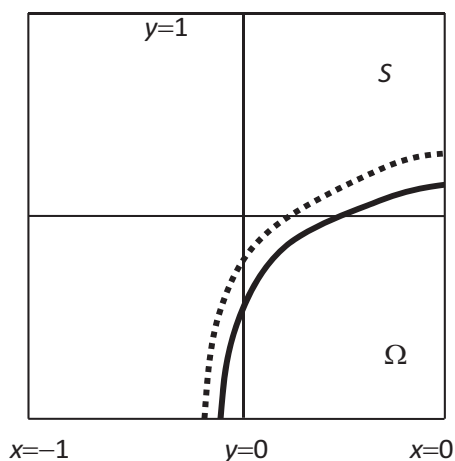


Рис. 5. Границы четвертей симметричных по x, y областей Ω (ядро (7)); $h=4, A_0=B_0=\varepsilon=1, \delta=0,7$ (сплошная линия) и $\delta=1$ (точки)

На рис. 6а для ядра (11) показана зависимость $P(h)$ при $\delta=A_0=B_0=\varepsilon=1$ (сплошная линия). Пунктир соответствует точному решению задачи Герца для единичного штампа [13] (ядро вида $1/R$). Для случая рис. 6 при $h \approx 4,3$ сила для двух параллельных цепочек штампов с пригрузкой соответствует силе по точному решению для единичного штампа. На рис. 6б при $A_0=B_0=\varepsilon=1$ (ядро (11)) приведены графики $P(\delta)$ при $h=2$ (сплошная линия) и $h=4$ (пунктир). На рис. 7 показаны границы половинок областей контакта для ядра (11) при $\delta=0,5$, $A_0=B_0=\varepsilon=1$, $h=2$ (сплошная линия) и $h=8$ (пунктир). Площадь области Ω возрастает при уменьшении h с асимметрией возрастания влево от вертикали $x=0$. На рис. 8 показаны границы половинок областей контакта для ядра (11) при $h=4$, $A_0=B_0=\varepsilon=1$, $\delta=0,7$ (сплошная линия) и $\delta=1$ (точки). Область Ω возрастает при росте осадки δ с асимметрией возрастания влево от вертикали $x=0$. При увеличении осадки для вытянутых вдоль оси y штампов для обеих задач наблюдается перколяция – слияние соседних областей контакта на линии $y=1$.

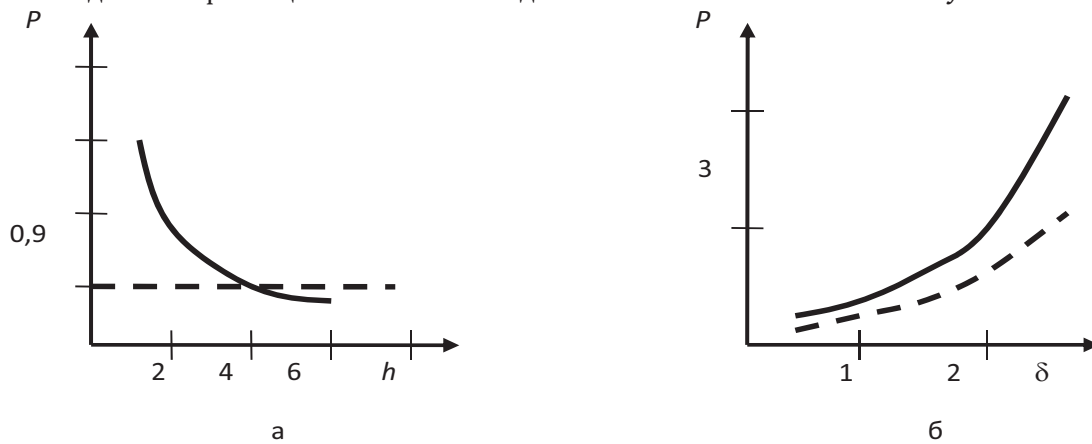


Рис. 6. Графики для ядра (11): (а) $P(h)$ при $d=A_0=B_0=\varepsilon=1$ (сплошная линия) и точное решение задачи Герца (пунктир) и (б) $P(\delta)$ $A_0=B_0=\varepsilon=1$, $h=2$ (сплошная линия) и $h=4$ (пунктир)

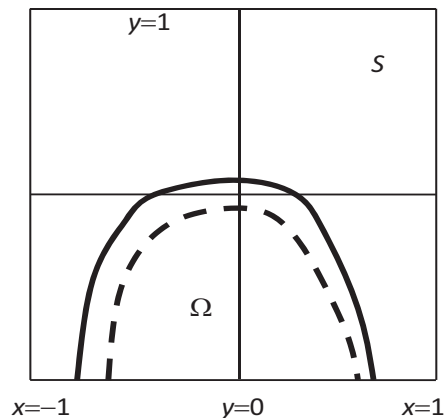


Рис. 7. Границы половинок симметричных по y областей Ω (ядро (11)); $\delta=0,5$, $A_0=B_0=\varepsilon=1$, $h=2$ (сплошная линия) и $h=8$ (пунктир)

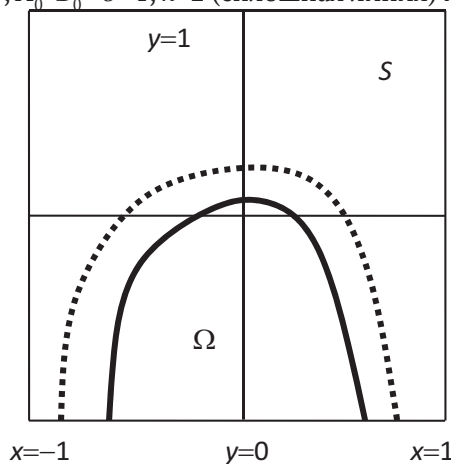


Рис. 8. Границы половинок симметричных по y областей Ω (ядро (11)); $h=4$, $A_0=B_0=\varepsilon=1$, $\delta=0,7$ (сплошная линия) и $\delta=1$ (точки)

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Показана возможность регуляризации расходящихся ядер интегральных уравнений линейно-периодических контактных задач Герца для одной или двух бесконечных цепочек штампов. Для этого использованы дополнительные периодические системы нормальных сосредоточенных сил с тем же периодом; суммарная сила, приложенная к границе полупространства, должна быть нулевой.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кузнецов, Е.А. Периодическая контактная задача с учетом пригрузки, действующей вне штампа / Е.А. Кузнецов // Изв. АН СССР. МТТ. – 1982. – № 1. – С. 84-93.
2. Goryacheva, I.G. The periodic contact problem for an elastic half-space / I.G. Goryacheva // J. Appl. Math. Mech. – 1998. – Vol. 62. – No. 6. – P. 959-966.
3. Aleksandrov, V.M. Doubly periodic contact problems for an elastic layer / V.M. Aleksandrov // J. Appl. Math. Mech. – 2002. – Vol. 66. – No. 2. – P. 297-305.
4. Yastrebov, V.A. The contact of elastic regular wavy surfaces revisited / V.A. Yastrebov, G. Anciaux, J.-F. Molinari // Tribol. Lett. – 2014. – Vol. 56. – P. 171-183.
5. Tsukanov, I.Y. An extended asymptotic analysis for elastic contact of three-dimensional wavy surfaces / I.Y. Tsukanov // Tribol. Lett. – 2019. – Vol. 67. – No. 4. – P. 107.
6. Goryacheva, I.G. Development of discrete contact mechanics with applications to study the frictional interaction of deformable bodies / I.G. Goryacheva, I.Yu. Tsukanov // Mech. Solids. – 2020. – Vol. 55. – No. 8. – P. 1441-1462.
7. Goryacheva, I. The periodic contact problem for spherical indenters and viscoelastic half-space / I. Goryacheva, A. Yakovenko // Tribol. Int. – 2021. – Vol. 161. – P. 107078.
8. Goryacheva, I. Discrete contact mechanics with applications in tribology / I. Goryacheva, Y. Makhovskaya. – Amsterdam: Elsevier, 2022. – 220 p.
9. Zolotov, N.B. Periodic contact problems for a half-space with a partially fixed boundary / N.B. Zolotov, D.A. Pozharskii // Mech. Solids. – 2022. – Vol. 57. – No. 7. – P. 152-159.
10. Pozharskaya, E.D. Periodic contact problems for a wedge with friction forces taken into account / E.D. Pozharskaya, D.A. Pozharskii, B.V. Sobol // Mech. Solids. – 2023. – Vol. 58. – No. 5. – P. 1578-1586.
11. Цуканов, И.Ю. Контактные задачи для упругих тел с регулярным рельефом поверхностей / Цуканов И.Ю. – Дисс. ... докт. физ.-мат. н. – М., 2024. – 190 с.
12. Galanov, B.A. The method of boundary equations of the Hammerstein-type for contact problems of the theory of elasticity when the regions of contact are not known / B.A. Galanov // J. Appl. Math. Mech. – 1985. – Vol. 49. – No. 5. – P. 634-640.
13. Ворович, И.И. Неклассические смешанные задачи теории упругости / И.И. Ворович, В.М. Александров, В.А. Бабешко. – М.: Наука, 1974. – 456 с.

LINEAR-PERIODIC HERTZ CONTACT PROBLEMS FOR AN ELASTIC HALF-SPACE

© 2025 D.A. Pozharskii, E.D. Pozharskaya

Don State Technical University, Rostov-on-Don

Spatial contact problems are considered for an elastic half-space, when one or two endless periodic chains of rigid punches are lined up along a straight line. The problems generalize the classical Hertz contact problem for a unit elliptic stamp on an elastic half-space that has an exact solution. In the linearly periodic case, the superposition of kernels of the integral equation of the Hertz contact problem yields a divergent series of harmonic type. Following the idea of E.A. Kuznetsov on the introduction of additional (relative) displacements, regularization of the kernels is carried out by adding given periodic systems of concentrated forces (with the same period as the punch systems), symmetric with respect to the punch systems. The vector sum of the forces applied to the punches and the additional forces outside the contact area must be zero. This leads to converging series in the kernels of integral equations. For unknown contact areas, the method of B. A. Galanov is used for numerical solution with the introduction of special nonlinear operators, which allows us to determine the contact area and contact pressures simultaneously by iterations according to the Newtonian scheme for nonlinear integral equations of the Hammerstein type. The nonlinearity of the problems is due to the fact that the contact area is not known in advance and is determined from the condition that the contact pressure at its boundary is equal to zero, which even in the Hertz problem leads to a nonlinear relationship between the characteristics of the contact. Punch systems in the form of elliptical paraboloids are considered. Contact areas are calculated, as well as the integral characteristics of the contact (pressing forces) depending on the settlement of the punches and on the distance between the chains of punches and additional forces. To debug the program, an exact solution to the Hertz problem is used. It has been shown that percolation (merging of discrete contact zones) with the formation of a continuous infinitely long contact zone is observed for sufficiently elongated along the axis of the chain of punches when the contact is strengthened (increase in the settlement of punches).

Key words: elastic half-space, periodic contact problem, integral equations, regularization, numerical method.

DOI: 10.37313/1990-5378-2025-27-2-132-138

EDN: HXLBNN

REFERENCES

1. Kuznetsov, E.A. Periodicheskaya kontaktnaya zadacha s uchetom prigruzki, deistvuyushei vne shtampa / E.A. Kuznetsov // *Izv. AN SSSR. MTT.* – 1982. – No. 1. – S. 84-93.
2. Goryacheva, I.G. The periodic contact problem for an elastic half-space / I.G. Goryacheva // *J. Appl. Math. Mech.* – 1998. – Vol. 62. – No. 6. – P. 959-966.
3. Aleksandrov, V.M. Doubly periodic contact problems for an elastic layer / V.M. Aleksandrov // *J. Appl. Math. Mech.* – 2002. – Vol. 66. – No. 2. – P. 297-305.
4. Yastrebov, V.A. The contact of elastic regular wavy surfaces revisited / V.A. Yastrebov, G. Anciaux, J.-F. Molinari // *Tribol. Lett.* – 2014. – Vol. 56. – P. 171-183.
5. Tsukanov, I.Y. An extended asymptotic analysis for elastic contact of three-dimensional wavy surfaces / I.Y. Tsukanov // *Tribol. Lett.* – 2019. – Vol. 67. – No. 4. – P. 107.
6. Goryacheva, I.G. Development of discrete contact mechanics with applications to study the frictional interaction of deformable bodies / I.G. Goryacheva, I.Yu. Tsukanov // *Mech. Solids.* – 2020. – Vol. 55. – No 8. – P. 1441-1462.
7. Goryacheva, I. The periodic contact problem for spherical indenters and viscoelastic half-space / I. Goryacheva, A. Yakovenko // *Tribol. Int.* – 2021. – Vol. 161. – P. 107078.
8. Goryacheva, I. Discrete contact mechanics with applications in tribology / I. Goryacheva, Y. Makhovskaya. – Amsterdam: Elsevier, 2022. – 220 p.
9. Zolotov, N.B. Periodic contact problems for a half-space with a partially fixed boundary / N.B. Zolotov, D.A. Pozharskii // *Mech. Solids.* – 2022. – Vol. 57. – No 7. – P. 152-159.
10. Pozharskaya, E.D. Periodic contact problems for a wedge with friction forces taken into account / E.D. Pozharskaya, D.A. Pozharskii, B.V. Sobol // *Mech. Solids.* – 2023. – Vol. 58. – No 5. – P. 1578-1586.
11. Tsukanov, I.Y. Kontaktnye zadachi dlya uprugikh tel s regul'yarnym rel'efom poverkhnostei / I.Y. Tsukanov. – Diss. ... dokt. fiz.-mat. n. – M., 2024. – 190 s.
12. Galanov, B.A. The method of boundary equations of the Hammerstein-type for contact problems of the theory of elasticity when the regions of contact are not known / B.A. Galanov // *J. Appl. Math. Mech.* – 1985. – Vol. 49. – No. 5. – P. 634-640.
13. Vorovich, I.I. Neklassicheskie smeshannye zadachi teorii uprugosti / I.I. Vorovich, V.M. Aleksandrov, V.A. Babeshko. – M.: Nauka, 1974. – 456 s.

Dmitrii Pozharskii, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Head of Department of Applied Mathematics.

E-mail: pozharda@rambler.ru

Elizaveta Pozharskaya, Assistant, Department of Informational Technologies. E-mail: pozharskaya.elizaveta@rambler.ru