

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОПТИМИЗАЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ
ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ОПЕРАЦИЙ НА ПРЕДПРИЯТИИ**

© 2025 Р.З. Валиуллин, И.Ф. Юлдашев

Казанский национальный исследовательский технический университет
имени А.Н. Туполева, г. Казань, Россия

Статья поступила в редакцию 20.06.2025

Статья посвящена вопросам оптимизации распределения технологических операций на производственном предприятии. В условиях, когда предприятия, особенно небольшие и средние, сталкиваются с неравномерной загрузкой оборудования и частыми изменениями ассортимента, возникает необходимость в эффективном и рациональном решении о перераспределении операций. В этой связи предлагается математическая модель, позволяющая принимать оптимальные управленческие решения по распределению технологических операций, при этом учитывая реальные ограничения, специфику оборудования и особенности производства, что, как показывает практика, существенно влияет на итоговую эффективность.

Ключевые слова: математическое моделирование, оптимизация, линейное программирование, технологические операции, распределение ресурсов, оборудование с ЧПУ, универсальное оборудование, управленческие решения.

DOI: 10.37313/1990-5378-2025-27-4-77-81

EDN: EGMFMP

Современное производство, в том числе наукоемкое, все чаще сталкивается с нестабильностью. Ассортимент может меняться, загрузка оборудования идти волнообразно, особенно для небольших производственных предприятий склонных к кризису роста. Вполне естественно, что лица, принимающие решения, стремясь как-то упорядочить процессы, пересматривают логистику, пробуют перераспределять ресурсы, иногда даже радикально. Один из возможных шагов - частичная (а порой и почти полная) замена имеющегося оборудования на более современные аналоги. Теоретически это обещает выигрыш и по времени, и по деньгам. Но – что важно – подобные решения требуют внятной численной базы. И именно здесь математическое моделирование выходит на передний план, поскольку является реальным инструментом при принятии логистических производственных решений.

Вопрос о том, как именно распределить операции между различными типами оборудования, вполне можно перевести в задачу линейного программирования, где каждая операция рассматривается как некое задание, которое должно быть передано одному из альтернативных ресурсов. Обычно эти ресурсы различаются по времени выполнения и стоимости. Что характерно, в ряде работ (например, в [1]) подчеркивается: само по себе распределение - лишь часть задачи. Важно учитывать и технологические связи между операциями, и ограничения на их возможное объединение. Все это влияет на результат не меньше, чем производственные мощности. Применение таких моделей позволяет не просто «перераспределить» задачи, а увидеть, при каких условиях использование современного оборудования действительно дает экономический эффект - с учетом полного расчета по времени и затратам.

Один из показательных случаев - когда операции, ранее выполнявшиеся на различных универсальных станках, переносятся на новое оборудование. Сама по себе такая замена может выглядеть очевидной, однако на практике она требует перерасчета многих параметров: от возможности технологического совмещения операций до различий в стоимости минуты обработки. Помимо этого, важно учитывать возможные перестановки в порядке выполнения. В работе [2] предлагается подход, где ключевым становится не сокращение затрат как таковых, а сбалансированность всего производственного процесса. Такой подход, разумеется, применим и там, где цель все же связана с минимизацией затрат, но при этом объем выпуска должен оставаться сбалансированным.

Есть еще один момент, который нельзя игнорировать: одна и та же операция нередко допускает выполнение на разных типах оборудования. И здесь уже речь идет не просто о расчетах, а о выборе - и этот выбор влияет на всю схему маршрутов. Подобные ситуации требуют гибкости в построении модели. Сами по себе методы оптимизации вроде симплексного или метода ветвей и границ - инструменты проверенные, но, как правило, нуждаются в адаптации под такие условия. В работе [4], например, подчеркивается, что многое зависит от того, как именно заданы стоимости переходов между

вариантами обработки. Если это сделано невнятно - результат может быть далек от оптимума. Зато если модель достаточно точна, перераспределение операций может не просто сократить затраты, но и снять избыточную нагрузку с перегруженных участков - что, в общем-то, не менее важно.

Стоит учитывать, что даже при явном выигрыше по времени далеко не каждое предприятие может позволить себе перенести все операции на более производительное оборудование. Причины здесь разные. Иногда - нехватка мощностей, иногда - экономические соображения. Новая оснастка стоит недешево, а еще бывают сложности с переналадкой, программированием, не говоря уже о необходимости переобучения персонала. Кроме того, станки с ЧПУ не всегда выгодны - при малых объемах или сложной номенклатуре их использование может попросту не окупиться. Поэтому на практике может сохраняться так называемый смешанный режим: часть операций по-прежнему остается за универсальными станками. И это, в общем-то, вполне рационально.

Чтобы корректно описать, какое оборудование используется для выполнения операций, в модели применяются бинарные переменные. Они позволяют задать не только выбор маршрута, но и учесть, как операции соотносятся между собой технологически. Бывает, что несколько операций можно выполнить последовательно на одном станке - без смены оснастки или переналадки. В таких случаях логично объединять эти операции внутри модели. Разделение между станками в подобных случаях нарушает саму технологическую логику. В работе [3] подчеркивается важность этого момента: учет технологических связей становится ключевым элементом в построении реалистичных и выполнимых оптимизационных решений.

Для постановки задачи оптимального распределения технологических операций между различными типами оборудования введем следующие обозначения:

$i \in \{1, 2, \dots, n\}$ - индекс технологической операции, где n - общее количество операций;

$x_i^{унив}, x_i^{ЧПУ} \in \{0, 1\}$ - бинарные переменные, отражающие выбор оборудования для выполнения операции i :

$x_i^{унив} = 1$, если операция выполняется на универсальном станке;

$x_i^{ЧПУ} = 1$, если операция выполняется на станке с ЧПУ;

при этом $x_i^{унив} + x_i^{ЧПУ} = 1$;

$t_i^{унив}, t_i^{ЧПУ}$ - нормативное время выполнения i -ой операции на соответствующем типе оборудования;

$s_i^{унив}, s_i^{ЧПУ}$ - нормативная стоимость выполнения i -ой операции на универсальном и ЧПУ-оборудовании соответственно;

$P = \{(j, k)\}$ - множество индексов пар операций, допускающих объединение в рамках одного сеанса наладки на ЧПУ-оборудовании;

λ - максимально допустимое относительное увеличение совокупных затрат при использовании ЧПУ-оборудования по сравнению с базовым сценарием.

Тогда временные затраты на выполнение всех операций можно выразить следующим образом:

$$T = \sum_{i=1}^n (t_i^{унив} \cdot x_i^{унив} + t_i^{ЧПУ} \cdot x_i^{ЧПУ}). \quad (1)$$

Соответственно, задача минимизации общего времени обработки может быть сформулирована как задача линейного программирования:

$$\sum_{i=1}^n (t_i^{унив} \cdot x_i^{унив} + t_i^{ЧПУ} \cdot x_i^{ЧПУ}) \rightarrow \min. \quad (2)$$

При следующих ограничениях:

$$x_i^{унив} + x_i^{ЧПУ} = 1, \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}; \quad (3)$$

$$x_j^{ЧПУ} = x_k^{ЧПУ}, \forall (j, k) \in P; \quad (4)$$

$$\sum_{i=1}^n (s_i^{унив} \cdot x_i^{унив} + s_i^{ЧПУ} \cdot x_i^{ЧПУ}) \leq (1 + \lambda) \cdot \sum_{i=1}^n s_i^{унив}; \quad (5)$$

$$x_i^{унив}, x_i^{ЧПУ} \in \{0, 1\}, \forall i. \quad (6)$$

В ограничении (3) задается условие: каждая операция должна быть выполнена только на одном типе оборудования. То есть либо на универсальном станке, либо на ЧПУ - без параллельных работ.

Ограничение (4) вводится для учета возможности объединения отдельных операций, например, при использовании ЧПУ-станков. Такие объединения допустимы, когда несколько операций можно выполнить последовательно без смены оснастки.

Ограничение на затраты (5) задает допустимый относительный прирост стоимости обработки при использовании станков с ЧПУ. И наконец, ограничение (6) определяет, что $x_i^{унив}$, $x_i^{ЧПУ}$ – бинарные переменные.

В качестве иллюстрации работы модели приведем пример, основанный на реальных условиях, приближенных к производственной практике предприятия, специализирующегося на обработке металлических деталей. Для анализа были сопоставлены два маршрута механической обработки изделия «Кран запора воздуха»: первый - с использованием универсального оборудования, второй - с применением современной установки с числовым программным управлением (ЧПУ).

В таблице 1 рассмотрим ключевые операции и параметры механической обработки изделия, выполняемого на универсальном оборудовании.

Таблица 1. Параметры обработки на универсальном оборудовании

№	Операция	Время, мин	Стоимость, руб.
1	Сверление отверстия д.15-0,2	0,56	2,76
2	Фрезеровка остатка литника	0,37	1,82
3	Сверление 4 отверстий д.8,5	0,41	2,11
4	Сверление 2 отверстий д.5	0,20	1,03
5	Расточка поверхности д.16	1,10	5,85
6	Расточка паза д.12×3,3	0,88	4,68
7	Нарезка резьбы КГ1/8	0,12	0,62
8	Нарезка резьбы 3/8	0,11	0,56
	Итого	3,75	19,43

Как упоминалось ранее, при использовании оборудования с ЧПУ некоторые операции допускают технологическое объединение, что, в свою очередь, влияет как на продолжительность выполнения, так и на стоимость самой обработки. Отразим их с ключевыми параметрами выполнения операций на современном станке с числовым программным управлением в таблице 2.

Таблица 2. Параметры обработки на оборудовании с ЧПУ

№	Операция	Время, мин	Стоимость, руб.
1	Сверление отверстия д.15-0,2	1,5	14,16
2	Нарезка резьбы 3/8		
3	Фрезеровка остатка литника	1,00	9,44
4	Сверление 4 отверстий д.8,5	0,50	4,72
5	Сверление 2 отверстий д.5	0,17	1,60
6	Расточка поверхности д.16	0,50	4,72
7	Расточка паза д.12×3,3		
8	Нарезка резьбы КГ1/8	0,33	3,15
	Итого	4,00	37,79

Из таблицы видно, что в маршруте с применением станка с ЧПУ объединение операций позволяет сократить число наладок и переходов, но при этом стоимость обработки возрастает по сравнению с базовым маршрутом. Впрочем, это не всегда означает неэффективность: при росте объемов и потребности в стабильности времени выполнения маршрут с ЧПУ может оказаться предпочтительнее, особенно если часть операций, как в данном примере, выполняется быстрее.

Следует также отметить, что объединение технологически совместимых операций повлекло за собой изменение последовательности операций по сравнению с маршрутом на универсальном оборудовании. Такое изменение является допустимым с точки зрения производственной логики рассматриваемого изделия и обусловлено отсутствием необходимости в смене оснастки.

Решение задачи проводилось с использованием табличного редактора Microsoft Excel, в частности, инструментарием «Поиск решения». Результаты решения представлены в таблице 3.

Таблица 3. Результаты решения задачи

№	Наименование операции	$t_i^{унив}$, мин	$t_i^{ЧПУ}$, мин	$x_i^{унив}$	$x_i^{ЧПУ}$
1	Сверление отверстия д.15-0,2	0,56	1,5	1	0
2	Нарезка резьбы 3/8	0,11		1	0
3	Фрезеровка остатка литника	0,37	1,00	1	0
4	Сверление 4 отверстий д.8,5	0,41	0,50	1	0
5	Сверление 2 отверстий д.5	0,2	0,50	0	1
6	Расточка поверхности д.16	1,10		0	1
7	Расточка паза д.12х3,3	0,88		0	1
8	Нарезка резьбы КГ1/8	0,12	0,33	1	0

По результатам решения задачи было установлено, что оптимальным является перенос трех операций на оборудование с числовым программным управлением, а именно:

- сверление двух отверстий диаметром 5 мм;
- расточка поверхности д.16;
- расточка паза д.12х3,3.

Остальные операции, несмотря на потенциальную возможность их выполнения на станке с ЧПУ, модель предлагает оставить на универсальном (базовом) оборудовании.

Для наглядности, в таблице 4 приведем сравнение ключевых производственных показателей до и после оптимизации маршрута.

Таблица 4. Сравнение расчетных и фактических показателей

Показатель	Базовый вариант	Расчетный вариант	Изменение
Общее время обработки, мин.	3,75	2,24	-40,26 %
Совокупные стоимостные затраты, руб.	19,43	14,19	-26,96 %

Как показывают результаты сравнения, перенос части операций на оборудование с ЧПУ действительно может позволить существенно сократить общее время обработки - на 40 % (с 3,75 до 2,24 мин). Однако несколько неожиданным оказался итог по совокупным затратам. Стоимость отдельных операций на ЧПУ, как правило, выше - и это было заранее учтено в модели через ограничение (5) на допустимый относительный прирост. Несмотря на это, расчётный маршрут оказался экономичнее. Совокупные затраты снизились почти на 27 % (с 19,43 до 14,19 руб.), что, казалось бы, противоречит ожиданиям.

Тем не менее, полученный результат остаётся объяснимым. Очевидно, что в случае полного переноса всех операций на оборудование с ЧПУ - затраты были бы значительно выше базовых. Однако в результате оптимизации были выбраны такие операции, для которых перенос на современное оборудование оказался выгоден не только по времени, но и по затратам. Этот эффект возник не вследствие заложенного алгоритма, а как следствие специфики конкретного технологического процесса: операции с наибольшим временным выигрышем в данном случае совпали с менее затратными.

Стоит отметить, что подход, заложенный в модели, не ориентирован на полную автоматизацию производства любой ценой. Он предполагает оптимальный выбор: операции переносятся на ЧПУ-оборудование только в тех случаях, когда это действительно оправдано как с точки зрения временных характеристик, так и по затратам.

Важный плюс заключается и в функциональной универсальности метода. С одной стороны, он позволяет решать задачу маршрутизации с учетом множества производственных ограничений и параметров. С другой - дает инструмент для принятия инженерных решений, например, при выборе стратегии модернизации оборудования или оценки последствий внедрения новых технологических возможностей.

Что особенно ценно - применение модели не требует ни сложной инфраструктуры, ни избыточных объемов исходных данных. В то же время она остается адаптируемой: позволяет учитывать особенности загрузки оборудования, режимов выпуска, структуры участка. Это особенно важно в

ситуациях переходного характера - например, при частичном обновлении оборудования, когда цех еще не перестроен, но уже требует новых логистических решений.

И, пожалуй, самое важное: модель позволяет сравнивать сценарии. Не на уровне абстрактных допущений, а на основе конкретных расчетов. И если под рукой есть инструмент, который может это обеспечить - это уже дает основание для более обоснованного выбора.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Матвеева, Е.А.* Моделирование и оптимизация загрузки производственных мощностей предприятия с мелкосерийным типом производства / Е.А. Матвеева, С.Г. Симагина // Отходы и ресурсы. – 2019. – Т. 6. – № 2. – С. 12-21. – DOI: 10.15862/16ECOR219.
2. *Бром, А.Е.* Математическая модель организации производства на основе ресурсосбережения / А.Е. Бром, Е.В. Елисеева // Наука и образование МГТУ им. Н.Э. Баумана. – 2013. – № 5. – С. 11-24. – DOI: 10.7463/0513.0568317.
3. *Губарева, Е.А.* Вопросы оптимального управления ресурсами / Е.А. Губарева // Прогрессивная экономика. – 2024. – № 6. – С. 172-185. – DOI: 10.54861/27131211_2024_6_172.
4. *Картамышев, Н.А.* Методы оптимизации производства на промышленном предприятии / Н.А. Картамышев // StudNet. – 2022. – Т. 5. – № 6. – С. 67.

MATHEMATICAL MODEL OF OPTIMIZING THE DISTRIBUTION OF TECHNOLOGICAL OPERATIONS AT THE ENTERPRISE

© 2025 R.Z. Valiullin, I.F. Yuldashev

Kazan National Research Technical University named after A.N. Tupolev, Kazan, Russia

The article is devoted to the issues of optimizing the distribution of technological operations at a manufacturing enterprise. In conditions when enterprises, especially small and medium-sized ones, are faced with uneven equipment loading and frequent changes in product range, there is a need for an effective and rational solution to redistribute operations. In this regard, a mathematical model is proposed that allows making optimal management decisions on the distribution of technological operations, while taking into account real limitations, equipment specifics and production features, which, as practice shows, significantly affects the final efficiency.

Key words: mathematical modeling, optimization, linear programming, technological operations, resource allocation, CNC equipment, universal equipment, management decisions.

DOI: 10.37313/1990-5378-2025-27-4-77-81

EDN: EGMFMP

REFERENCES

1. *Matveeva, E.A.* Modelirovanie i optimizaciya zagruzki proizvodstvennyh moshchnostej predpriyatiya s melkoserijnym tipom proizvodstva / E.A. Matveeva, S.G. Simagina // Othody i resursy. – 2019. – Т. 6. – № 2. – С. 12-21. – DOI: 10.15862/16ECOR219.
2. *Brom, A.E.* Matematicheskaya model' organizacii proizvodstva na osnove resursosberezheniya / A.E. Brom, E.V. Eliseeva // Nauka i obrazovanie MGTU im. N.E. Bauman. – 2013. – № 5. – С. 11-24. – DOI: 10.7463/0513.0568317.
3. *Gubareva, E.A.* Voprosy optimal'nogo upravleniya resursami / E.A. Gubareva // Progressivnaya ekonomika. – 2024. – № 6. – С. 172-185. – DOI: 10.54861/27131211_2024_6_172.
4. *Kartamyshev, N.A.* Metody optimizacii proizvodstva na promyshlennom predpriyatii / N.A. Kartamyshev // StudNet. – 2022. – Т. 5. – № 6. – С. 67.