

УДК 517.93, 517.937

К ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ РЕАЛИЗАЦИИ БИЛИНЕЙНЫХ НЕАВТОНОМНЫХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

© 2025 Р.А. Данеев¹, В.А. Русанов²

¹ Восточно-Сибирский институт МВД России, г. Иркутск, Россия

² Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова СО РАН,
г. Иркутск, Россия

Статья поступила в редакцию 20.05.2025

В работе установлен характеристический признак разрешимости задачи дифференциальной реализации континуального пучка управляемых траекторных кривых в классе билинейных неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений (с запаздыванием и без) второго порядка в сепарабельном гильбертовом пространстве. Рассматриваемая задача относится к типу обратных задач для аддитивной комбинации нестационарных линейных и билинейных операторов эволюционного уравнения в гильбертовом пространстве. Метаязыком данной теории служат конструкции тензорных произведений гильбертовых пространств, структуры решеток с ортодополнением, теория расширения M_2 -операторов и функциональный аппарат нелинейного оператора Релея-Ритца. Показано, что в случае конечного пучка траекторных кривых наличие свойства сублинейности данного оператора, позволяет получить достаточные условия для существования таких реализаций. Попутно обосновываются тополого-метрические условия непрерывности проективизации нелинейного оператора Релея-Ритца с вычислением фундаментальной группы его образа.

Ключевые слова: тензорный анализ, эволюционные уравнения второго порядка с запаздыванием, билинейная неавтономная дифференциальная реализация, функциональный оператор Релея-Ритца.

DOI: 10.37313/1990-5378-2025-27-5-217-229

EDN: ZJNGLI

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ (проект: 121041300056-7).

ВВЕДЕНИЕ

Общая теория дифференциальной реализации (ОТДР) эволюционных уравнений в гильбертовом пространстве, рассматриваемая в духе обратных задач бесконечномерного нелинейного системного анализа, сложнее, интереснее, глубиннее в приложениях и очень важна для понимания основных свойств самих дифференциальных моделей. Ее теоретико-системные конструкции могут служить отправными точками развития общей (аксиоматической) теории реализации (см. гл. 3 из [1]), попутно создавая этим конструкциям репутацию полезного математического инструмента в прецизионном моделировании уравнений динамического представления для надлежащем образом определенной временной системы (определение 2.2 [1, с. 28]).

В методологическом плане ОТДР можно рассматривать как «первый шаг» на пути построения качественной теории апостериорного моделирования эволюционных дифференциальных уравнений [2] на стыке функционального анализа [3, 4], тензорной алгебры [5] и дифференциальных уравнений в бесконечномерных пространствах. Причем в теоретико-системном анализе непрерывных слабоструктурированных временных систем до какого-то момента «механический перенос» результатов конечномерной теории реализации на бесконечномерный случай проходит без особых осложнений. Это относится как к стационарным, так и нестационарным дифференциальным моделям *первого порядка* (параболические уравнения и системы диффузионного типа) в пространствах Гёльдера [6], или

Данеев Роман Алексеевич, кандидат технических наук, доцент кафедры информационных технологий Восточно-Сибирского института МВД России. E-mail: romasun@mail.ru

Русанов Вячеслав Анатольевич, доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник ИДСТУ СО РАН. E-mail: v.rusanov@mail.ru

сепарабельных банаховых/гильбертовых пространствах [7, 8] (с программным и позиционно-нелинейным управлением).

Существенные аналитические трудности начинаются при переходе к построению дифференциальной реализации с динамическим порядком *выше первого* [9], в том числе, неноминальный учет структуры гиперболических моделей [10], при представлении уравнений которых нельзя обойтись без учёта нелинейности их динамики. В частности, – билинейной структуры модели реализации [11, 12], учитывающей эффект запаздывания в моделируемых билинейных обратных связях, на чем и акцентируется основное внимание в данной статье. При этом покажем, что, осуществляя аналитическую связь между проективной геометрией и дифференциальной реализацией моделируемых бесконечномерных управляемых динамических процессов, конструкцию проективизации функционального оператора Релея–Ритца [8] и геометрический анализ условий его непрерывности удобно формулировать на языке компактных топологических многообразий тензорных произведений гильбертовых пространств в терминах CW -комплексов Уайтхеда [13]. Такая качественная теория до конца еще не создана и не так давно не существовало еще и базы для неё. За последнее десятилетие положение существенно изменилось [7–12], и можно считать, что теперь такая аналитическо-геометрическая база существует в виде теории расширений нестационарных функциональных M_p -операторов [7].

Данная работа развивает изыскания [12], позволяя в перспективе учитывать в нелинейном дифференциальном моделировании уравнений динамики локальных популяций нейронов [14] эффект запаздывания сигналов в нелинейных нейродинамических системах, задаваемых функционально-апостериорной моделью типа «вход–выход» (модель «черного ящика» [1, с. 21]).

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

На современном уровне развития чистой и прикладной математики конструкции ОТДР пропитаны теорией множеств, топологией и общей алгебры, включающей основы тензорного анализа, а также геометрической теорией расширений в банаховых пространствах функциональных M_p -операторов, являясь основой теории динамических (временных) систем [1], а в последнее время и нелинейных неавтономных нейроморфных динамических моделей [14].

Далее $(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$ – вещественные сепарабельные гильбертовы пространства (т.е. нормы удовлетворяют «условию параллелограмма» [15, с. 47]), $E: Y \rightarrow X$ – линейная изометрия (сохраняющая норму [3, с. 176]) пространств Y и X . Как обычно $L(\mathcal{B}', \mathcal{B}'')$ – банахово пространство (с операторной нормой) всех линейных непрерывных операторов для банаховых пространств $\mathcal{B}'$ и $\mathcal{B}''$, $\mathcal{L}(X^2, X)$ – пространство всех непрерывных билинейных отображений из декартового квадрата $X \times X$ в пространство X ; ниже активно будем использовать линейную изометрию пространств $\mathcal{L}(X^2, X)$ и $L(X, L(X, X))$ (см. рассуждения из п. 2.3 [3, с. 650]).

Обозначим через T отрезок числовой прямой R с мерой Лебега μ , через $\mathcal{P}_\mu$ – σ -алгебру всех μ -измеримых подмножеств из T , запись $S \subseteq Q \pmod{\mu}$ для $S, Q \in \mathcal{P}_\mu$ означает $\mu(S \setminus Q) = 0$. Сверх того примем, что $AC^1(T, X)$ – множество всех функций $\varphi: T \rightarrow X$, первая производная которых является абсолютно непрерывной функцией (относительно меры μ) на интервале T .

Если ниже $(\mathcal{B}, \|\cdot\|)$ – некоторое банахово пространство, то через $L_p(T, \mathcal{B})$, $p \in [1, \infty)$, как обычно, будем обозначать банахово пространство всех классов μ -эквивалентности интегрируемых по Бохнеру [16, с. 189] отображений $f: T \rightarrow \mathcal{B}$ с нормой $(\int_T \|f(\tau)\|^p \mu(d\tau))^{1/p} < \infty$, соответственно через $L_\infty(T, \mathcal{B})$ – банахово пространство данных классов с нормой $\text{ess sup}_T \|f\| < \infty$. В данном контексте нам понадобятся следующие операторные пространства:

$$\begin{aligned} L_2 &:= L_2(T, L(X, X)) \times L_2(T, L(X, X)) \times L_2(T, L(Y, X)) \times \\ &\times L_2(T, \mathcal{L}(X^2, X)) \times L_2(T, \mathcal{L}(X^2, X)) \times L_2(T, \mathcal{L}(X^2, X)) \times L_2(T, \mathcal{L}(X^2, X)) \times L_2(T, \mathcal{L}(X^2, X)), \\ L^* &:= L(X, X) \times L(X, X) \times L(Y, X) \times \mathcal{L}(X^2, X) \times \mathcal{L}(X^2, X) \times \mathcal{L}(X^2, X) \times \mathcal{L}(X^2, X) \times \mathcal{L}(X^2, X). \end{aligned}$$

Далее считаем, что на временном интервале T фиксировано (возможно *a posteriori*) экзогенное поведение [17] исследуемой (моделируемой) динамической системы в виде не ограниченного по мощности нелинейного пучка N управляемых траекторных кривых типа «вход–выход» (определение 1.2 [1, с. 21]), т.е. формально будем полагать, что

$$N \subset \{(u, x) : x \in AC^1(T, X), u \in L_2(T, Y)\}, \text{ Card } N \leq \exp \aleph_0,$$

где (u, x) – пара «программное управление, траектория», $\aleph_0$ – алеф нуль, $\exp \aleph_0$ – континуум. Выше (и ниже) термин «нелинейный пучок» означает, что для траекторных кривых данного пучка *a priori* не предполагается наличие принципа суперпозиции, когда зависимость выходных величин от входных воздействий суть линейная (определение 1.1 [1, с. 85]).

Пусть задана, как инерционно-массовая характеристика моделируемой системы, оператор-функция при второй производной (в модели реализации) от траектории $t \mapsto x(t)$ вида:

$$\hat{A} \in L_\infty(T, L(X, X)),$$

$$\mu \{t \in T : \hat{A}(t) = 0 \in L(X, X)\} = 0;$$

при этом нарушение условия эквивалентности нормальной системе, а именно:

$$\mu \{t \in T : \text{Ker } \hat{A}(t) \neq \{0\} \subset X\} \neq 0,$$

необременительно (допустимо); в данном контексте см. ниже замечание 1.

Рассмотрим задачу: для фиксированной пары $(N, \hat{A})$ определить необходимые и достаточные условия, выраженные в терминах нелинейного пучка динамических процессов N и оператор-функции $\hat{A}$, существования упорядоченного набора из восьми оператор-функций

$$(A_1, A_0, B, D_1, D_2, D_3, D_4, D_5) \in L_2,$$

для которого осуществима билинейная неавтономная дифференциальная реализация (БНДР) с постоянным запаздыванием $\bar{\tau} = \text{const} \geq 0$, имеющая аналитическое представление вида:¹

$$\begin{aligned} & \hat{A} d^2 x / dt^2 + A_1 dx / dt + A_0 x = \\ & = B u + D_1(x, x) + D_2(x, dx/dt) + D_3(dx/dt, dx/dt) + \\ & + D_4(E(u), y) + D_5(E(u), dy/dt) \quad \forall (u, x) \in N; \\ & t \mapsto y(t) := \begin{cases} x(t - \hat{\tau}), & \text{если } t_0 + \hat{\tau} \leq t \leq t_1; \\ 0 \in X, & \text{если } t_0 \leq t < t_0 + \hat{\tau}. \end{cases} \end{aligned} \quad (1)$$

Если моделируемые операторы БНДР-системы (1) предполагается искать в классе *стационарных*, то будем их строить в классе *непрерывных*, и при этом писать

$$(A_1, A_0, B, D_1, D_2, D_3, D_4, D_5) \in L^*.$$

В связи с означенной математической постановкой отметим, что каждая область математики, как правило, содержит свои ведущие проблемы, которые настолько трудны (в парадигме непротиворечивости и полноты Гёделя [1, с. 247]), что их полное решение даже и не ожидается, но которые стимулируют постоянный поток работ и служат главными вехами на пути прогресса в этой области. В рамках ОТДР-исследований такой проблемой является проблема классификации экзогенного поведения [17] динамических систем, рассматриваемых так, как если бы они точно совпадали с решениями идеализированных дифференциальных моделей, в том числе высших порядков. В наиболее сильной форме она предполагает классификацию таких временных систем с точностью до соответствующего класса моделей дифференциальной реализации, в частности, класса БНДР-моделей (1), в обосновании чего ниже служат теоремы 1–3 и их следствия, которые позволяют в означенной классификации значительно приблизиться к идеальному сочетанию функциональной прозрачности [18] и геометрической наглядности [17, 19, 20], в том числе, в конструкциях энтропийной постановки [11].

¹ Равенство в дифференциальном уравнении (1) рассматривается как тождество в пространстве $L_1(T, X)$.

2. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЙ ПРИЗНАК БНДР-МОДЕЛИ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Многие разделы классической теории динамических систем [1], в том числе ОТДР, развились в обширные математические теории, при этом линейная алгебра, топология, дифференциальная и алгебраическая геометрия стали необходимыми орудиями ОТДР. Заметим также, что введение теоретико-системных математических конструкций ОТДР, грубо говоря, совпадает с понятием «временной причинной системы» в том смысле, что прошлое влияет на будущее, но не наоборот, при этом определяя описание нелинейного (на первом этапе моделирования *полилинейного*) потока причинно-следственных связей из прошлого в будущее. Почти очевидно, что характер *билинейного* моделирования (1) приводит к базовым конструкциям тензорного анализа (а в перспективе к пространствам Фока [4, с. 68]; см. ниже заключение).

Опишем теперь в общих чертах аналитическую схему решения вопроса о разрешимости (или неразрешимости) БНДР-задачи (1). Итак, пусть $Z := X \otimes X$ – гильбертово тензорное произведение [15, с. 54] гильбертовых пространств X и X ; будем также предполагать, что в Z задана кросснорма $\|\cdot\|_Z$, определяемая внутренним произведением [4, с. 64]. Сверх того, в целях удобства введем новые обозначения, которыми будем в дальнейшем широко пользоваться:

$$U := X \times X \times Y \times Z \times Z \times Z \times Z \times Z,$$

$$\|(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot, \cdot, \cdot, \cdot, \cdot)\|_U := (\|\cdot\|_X^2 + \|\cdot\|_X^2 + \|\cdot\|_Y^2 + \|\cdot\|_Z^2 + \|\cdot\|_Z^2 + \|\cdot\|_Z^2 + \|\cdot\|_Z^2 + \|\cdot\|_Z^2)^{1/2};$$

$$\begin{aligned} L_2 &:= L_2(T, L(X, X)) \times L_2(T, L(X, X)) \times L_2(T, L(Y, X)) \times \\ &\times L_2(T, L(Z, X)) \times L_2(T, L(Z, X)) \times L_2(T, L(Z, X)) \times L_2(T, L(Z, X)) \times L_2(T, L(Z, X)); \end{aligned}$$

несложно показать, что функциональное пространство L_2 с топологией произведения линейно гомеоморфно банахову функциональному пространству $L_2(T, L(U, X))$.

Обозначим через π – универсальное [5, с. 254] билинейное отображение

$$\pi: X \times X \rightarrow X \otimes X;$$

на языке теории категорий морфизм π определяет (через свой образ) тензорное произведение как универсальный отталкивающий объект [15, с. 40]. Универсальность билинейного отображения π состоит также в том, что выполняются равенства-соответствия:

$$(x_1, x_2) \mapsto \pi(x_1, x_2) = x_1 \otimes x_2, \quad \|x_1 \otimes x_2\|_Z = \|x_1\|_X \|x_2\|_X;$$

данные соотношения важны (понадобятся ниже; см. формулу (2)) для определения конструкции функционального оператора Релея–Ритца в части конкретизации нормы $\|\cdot\|_U$.

Далее считаем, что декартов квадрат $X^2 = X \times X$ наделен нормой $(\|\cdot\|_X^2 + \|\cdot\|_X^2)^{1/2}$. В данной постановке $\pi \in \mathcal{L}(X^2, Z)$ и, с учетом теоремы 2 [3, с. 245], для любого билинейного отображения $\mathcal{D} \in \mathcal{L}(X^2, X)$ всегда найдется линейный непрерывный оператор $D \in L(Z, X)$ такой, что $\mathcal{D} = D \circ \pi$, при этом для любой пары $(u, x) \in N$ будут выполняться включения:

$$\pi(x, x), \pi(x, dx/dt), \pi(dx/dt, dx/dt) \in L_\infty(T, Z),$$

$$\pi(E(u), y), \pi(E(u), dy/dt) \in L_2(T, Z).$$

Данные построения подытоживает следующее (одно из ключевых) утверждение:

Лемма 1. Для любого набора $(A_1, A_0, B, D_1, D_2, D_3, D_4, D_5) \in L_2$ и отображения

$$\begin{aligned} F: L_2(T, X) \times L_2(T, X) \times L_2(T, Y) \times \\ \times L_2(T, X^2) \times L_2(T, X^2) \times L_2(T, X^2) \times L_2(T, X^2) \times L_2(T, X^2) \rightarrow L_1(T, X), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7, y_8) \mapsto F(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7, y_8) := \\ = A_1 y_1 + A_0 y_2 + B y_3 + D_1 y_4 + D_2 y_5 + D_3 y_6 + D_4 y_7 + D_5 y_8 \end{aligned}$$

существуют единственный кортеж оператор-функций

$$(D_1, D_2, D_3, D_4, D_5, D_6, D_7, D_8) \in L_2$$

и, соответственно, единственное линейное отображение

$$M: L_2(T, U) \rightarrow L_1(T, X),$$

имеющее аналитическое представление вида

$$(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, z_7, z_8) \mapsto M(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, z_7, z_8) := \\ = D_1 z_1 + D_2 z_2 + D_3 z_3 + D_4 z_4 + D_5 z_5 + D_6 z_6 + D_7 z_7 + D_8 z_8,$$

такое, что выполняется следующее функциональное равенство:

$$(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7, y_8) \mapsto F(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7, y_8) = \\ = M(y_1, y_2, y_3, \pi(y_4), \pi(y_5), \pi(y_6), \pi(y_7), \pi(y_8)),$$

которое, в свою очередь, индуцирует для оператор-функций из конструкций отображений F и M следующие операторные соотношения:

$$A_1 = D_1, \quad A_0 = D_2, \quad B = D_3,$$

$$D_1 = D_4 \circ \pi, \quad D_2 = D_5 \circ \pi, \quad D_3 = D_6 \circ \pi, \quad D_4 = D_7 \circ \pi, \quad D_5 = D_8 \circ \pi.$$

Следующая лемма обобщает лемму 3 [17] (бихевиористическое условие (7) [19]).

Лемма 2. Пусть $S, Q \in \mathcal{P}_\mu$, тогда $S \subseteq_{\text{mod } \mu} Q$, если имеют место равенства:

$$S := \{t \in T : (g(t), w(t), v(t), q(t), s(t), h(t), \hat{u}(t), \tilde{u}(t)) = 0 \in U\}, \\ Q := \{t \in T : \dot{g}(t) = 0 \in X\}, \quad \dot{g} = dg/dt, \quad (g, w, v, q, s, h, \hat{u}, \tilde{u}) \in V_N, \\ V_N := \text{Span} \{(dx/dt, x, u, \pi(x, x), \pi(x, dx/dt), \pi(dx/dt, dx/dt), \\ \pi(E(u), y), \pi(E(u), dy/dt)) \in L_2(T, U) : (u, x) \in N\}.$$

Далее, пусть $(L_+(T, R), \leq_L)$ – положительный конус [21, с. 194] классов μ -эквивалентности всех вещественных неотрицательных μ -измеримых на интервале T функций с квазиупорядочением $\leq_L$, при котором $\xi' \leq_L \xi''$ в том и только в том случае, если $\xi'(t) \leq \xi''(t)$ μ -почти всюду в T . При этом для заданного подмножества $W \subset L_+(T, R)$ через $\sup_L W$ обозначим наименьшую верхнюю грань подмножества W , если эта грань существует в конусе $L_+(T, R)$ в структуре квазиупорядочения $\leq_L$, в частности, легко установить, что имеет место соотношение

$$\sup_L \{\xi', \xi''\} = \xi' \vee \xi'' := 2^{-1}(\xi' + \xi'' + |\xi' - \xi''|).$$

В данной постановке рассмотрим решетку с ортодополнением [4, с. 339]:

$$\mathcal{R}(W) := \{\xi \in L_+(T, R) : \xi \leq_L \sup_L W\}.$$

Тогда $(\mathcal{R}(W), \leq_L)$ – решетка, соответственно с наименьшим $\chi_\emptyset \in L_+(T, R)$ и наибольшим $\sup_L W \in L_+(T, R)$ элементами; здесь и далее $\chi_\emptyset$ – «нуль-функция» конуса $L_+(T, R)$.

В контексте определения 3 [16, с. 504] из теоремы 17 [3, с. 68] и следствия 1 [3, с. 69] несложно извлечь более общее утверждение; ниже $\inf_L$ – наибольшая нижняя $\leq_L$ -грань.

Лемма 3. Решетка $\mathcal{R}(W)$ – полная, т.е.

$$\inf_L V, \quad \sup_L V \in \mathcal{R}(W) \quad \forall V \subseteq \mathcal{R}(W).$$

Наше дальнейшее изложение будет основываться на аппарате расширений M_p -операторов (теории M_p -продолжимости [7]). Его аналитической базой являются различные модификации функционального нелинейного оператора Релея–Ритца [8, 9, 11, 12, 17–19]; другой подход, альтернативный (но равнозначный) теории M_p -продолжимости, использует различные конструкции бихевиористических лебеговски пополненных мер (3) [19]. В данном контексте ниже рассмотрим функциональный оператор Релея–Ритца $\Psi: V_N \rightarrow L_+(T, R)$ вида:

$$t \mapsto \Psi(\varphi)(t) := \begin{cases} \|\hat{A}(t)\dot{g}(t)\|_X / \|\varphi(t)\|_U, & \text{если } \varphi(t) \neq 0 \in U; \\ 0 \in R, & \text{если } \varphi(t) = 0 \in U; \end{cases} \quad (2)$$

где $\varphi := (g, w, v, q, s, h, \hat{u}, \tilde{u}) \in V_N$; при данных допущениях имеет место равенство

$$\|(g(t), w(t), v(t), q(t), s(t), h(t), \hat{u}(t), \tilde{u}(t))\|_U := \\ = (\|g(t)\|_X^2 + \|w(t)\|_X^2 + \|v(t)\|_Y^2 + \|q(t)\|_Z^2 + \|s(t)\|_Z^2 + \|h(t)\|_Z^2 + \|\hat{u}(t)\|_Z^2 + \|\tilde{u}(t)\|_Z^2)^{1/2}.$$

В силу леммы 2 на интервале времени T выполняется полезное уточнение:

$$\text{supp } \Psi(\varphi) = \text{supp } \|\hat{A}\dot{g}\|_X \pmod{\mu};$$

здесь в определении supp -конструкции носителя функции следуем [3, с. 137] (т.е. носитель определяется с точностью до множества меры нуль; не путать с определением 4 [16, с. 45]).

Нелинейный оператор (2) удовлетворяет весьма простым (но важным) соотношениям:

$$\chi_{\emptyset} \leq_L \Psi(\varphi) = \Psi(r\varphi), \quad r \in R^* := R \setminus \{0\}, \quad \varphi \in V_N;$$

ниже будем различать в обозначениях образ точки $\Psi(\varphi)$ и образ множества $\Psi[\{\varphi\}]$.

Общая теория операторов Релея–Ритца нуждается в своем функционально-геометрическом языке, что требует уделять этому языку особое внимание [18]. Поэтому, прежде чем идти дальше, введем дополнительную терминологию. А именно, оператор $\Psi: V_N \rightarrow L_+(T, R)$ очевидным образом индуцирует отображение

$$P\Psi: P_N \rightarrow L_+(T, R),$$

которое, по сложившейся в проективной геометрии традиции [5, с. 230], назовем *проективизацией* оператора Релея–Ритца:

$$P\Psi(\gamma) := \Psi[\gamma], \quad \gamma \in P_N \ (\gamma \subset V_N),$$

где P_N – вещественное проективное пространство, ассоциированное с линейным многообразием V_N (с топологией, индуцированной из пространства $L_2(T, U)$); т.е. P_N есть множество орбит мультипликативной группы R^* , действующей на $V_N \setminus \{0\}$. В данной геометрической трактовке ключевым моментом являются топологические свойства пространства P_N , $\dim P_N < \aleph_0$, разумеется, в первую очередь (в контексте теоремы 2), его компактность, в частности, если имеет место $\dim V_N = 3$, то компактное 2-многообразие P_N устроено как лист Мёбиуса, к которому по его границе приклеен круг [13, с. 162]. Попутно отметим, что на P_N можно ввести геометрическую структуру CW -комплекса [13, с. 140], что, в свою очередь, упрощает рассмотрение вопроса о геометрической реализации многообразия P_N – теорема 9.7 [13, с. 149].

Мы подошли к основному результату, в котором (в компактной формулировке, но не прибегая к довольно рутинному доказательству) в полной мере используем результаты лемм 1–3.

Теорема 1. а) Каждое из следующих трех условий влечет за собой два других:

- (i) БНДР-задача (1) разрешима относительно $(A_1, A_0, B, D_1, D_2, D_3, D_4, D_5) \in L_2$;
- (ii) $\exists \theta \in L_2(T, R) : \Psi(\varphi) \leq_L \theta, \quad \forall \varphi \in V_N$;
- (iii) $\exists \sup_L P\Psi[P_N] : \sup_L P\Psi[P_N] \in L_2(T, R)$.

б) Если БНДР-модель (1) существует и $\mathcal{R}(P\Psi[P_N]) \not\subset L_\infty(T, R)$, то эта БНДР-модель будет нестационарной (хотя бы относительно одного из её восьми моделируемых операторов).

Замечание 1. Теорему 1 можно рассматривать как начальный этап в изучении проблемы², когда пучку управляемых траекторных кривых $N \subset L_2(T, Y) \times AC^1(T, X)$ от неявного дифференциального уравнения высшего порядка требуется сопоставить явную билинейную дифференциальную систему класса (1) с тем же пучком N управляемых траекторий.

Доказательство. а) Будем пользоваться идеями работы [7]. Придерживаясь определения 1 [7], введем в рассмотрение конструкцию M_2 -оператора $M: L_2(T, U) \rightarrow L_1(T, X)$ вида:

$$\begin{aligned} \exists (D_1, D_2, D_3, D_4, D_5, D_6, D_7, D_8) \in L_2 : M(g, w, v, q, s, h, \hat{u}, \tilde{u}) := \\ = D_1 g + D_2 w + D_3 v + D_4 q + D_5 s + D_6 h + D_7 \hat{u} + D_8 \tilde{u} \\ \forall (g, w, v, q, s, h, \hat{u}, \tilde{u}) \in L_2(T, U). \end{aligned}$$

Остальные детали доказательства (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (i) с небольшими уточнениями (с учетом лемм 1–3; лемма 3 для полной решетки $\mathcal{R}(P\Psi[P_N])$) содержит схема M_2 -продолжимости в аналитической форме следствия 2 [7] и теоремы 3 [7].

б) Если БНДР-модель (1) существует, то необходимое условие стационарности её операторов (три линейных и пять билинейных), выраженное утверждением, что

$$(A_1, A_0, B, D_1, D_2, D_3, D_4, D_5) \in L^* \Rightarrow \mathcal{R}(P\Psi[P_N]) \subset L_\infty(T, R),$$

устанавливается прозрачной модификацией доказательства теоремы 3 [19]. ■

² Например, данная постановка уместна, когда разрешимую для пары $(N, \hat{A}_1)$ БНДР-задачу необходимо редуцировать к разрешимой БНДР-задаче для пары $(N, \hat{A}_2)$ в положении, когда $\mu\{t \in T : \text{Ker } \hat{A}_1(t) \neq 0 \in X\} \neq 0$, $\hat{A}_2$ – оператор гомотетии с коэффициентом 1; характер сопутствующих вычислений проиллюстрирован в примерах 1, 2.

Замечание 2. Необходимо отметить, что даже в случае $1 < \text{Card } N < \aleph_0$ имеет место положение $\text{Card } P_N = \exp \aleph_0$; но можно показать, что существует (теорема 17 [3, с. 68]) такое счетное множество $G \subset P_N$, что, если в пространстве $L_+(T, R)$ лежит $\sup_L P\Psi[P_N]$, то вещественную функцию $\zeta := \sup_L P\Psi[P_N]$ осуществляет следующая sup-конструкция:

$$t \mapsto \zeta(t) = \sup \{P\Psi(\gamma)(t) \in R : \gamma \in G\}.$$

Замечание 3. Доказательство теоремы 1 можно модифицировать, сформулировав критерий (см. теорему 3 [17]), выражающий в терминах углового расстояния (в гильбертовом пространстве) условия существования системы (1), реализующей пучки N_1, N_2 , каждый из которых обладает своей БНДР-моделью, в том числе, в математической постановке [19, 20], когда моделируемые операторы дифференциальной системы (1) суть стационарные, т.е.

$$(A_1, A_0, B, D_1, D_2, D_3, D_4, D_5) \in L^*,$$

в частности, данные операторы можно строить с минимальной нормой [7, 28].

В конкретных рассуждениях важен также следующий частный случай, охватывающих единым методом ряд важных БНДР-областей, при другом подходе не сразу усматривающихся.

Следствие 1. Если $\dim V_N < \aleph_0$, $\Psi[V_N] \subset L_2(T, R)$ и найдется $p \in [1, \infty)$, при котором

$$\Psi(\varphi_1 + \varphi_2) \leq_L p\Psi(\varphi_1) + p\Psi(\varphi_2), \quad (\varphi_1, \varphi_2) \in V_N \times V_N,$$

то БНДР-задача (1) разрешима.

Заметим, что при $p=1$ данное свойство оператора (2) в (контексте квазиупорядочения $\leq_L$) сродни свойству «сублинейности» [21, с. 400] функциональных операторов.

3. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ОПЕРАТОРА РЕЛЕЯ–РИТЦА В АНАЛИЗЕ РАЗРЕШИМОСТИ БНДР-ЗАДАЧИ

Одним из самых простых, но замечательных результатов в основаниях ОТДР является тот факт, что можно построить простую топологическую в конусе $L_+(T, R)$, после чего в случае компактности проективного многообразия P_N (равносильно, $\dim P_N < \aleph_0$) естественно попытаться связать это свойство с задачей построения решетки $\mathcal{R}(P\Psi[P_N])$ в контексте условий непрерывности проективизации оператора Релея–Ритца (см. также [18]); ниже при выборе в теореме 2 метрической структуры в конусе $L_+(T, R)$, прибегли к теоремам 15, 16 [3, сс. 65, 67] (в данной постановке $L_+(T, R)$ – полное сепарабельное метрическое пространство).

Теорема 2. Пусть $\dim P_N < \aleph_0$ и конус $L_+(T, R)$ наделен топологией, индуцированной сходимостью по мере μ , или, что эквивалентно, инвариантной³ метрикой

$$\rho_T(f_1, f_2) := \int_T |f_1(\tau) - f_2(\tau)| (1 + |f_1(\tau) - f_2(\tau)|)^{-1} \mu(d\tau), \quad f_1, f_2 \in L_+(T, R).$$

Тогда оператор $P\Psi: P_N \rightarrow L_+(T, R)$ будет непрерывным, если пучок N таков, что

$$\forall \varphi \in V_N \setminus \{0\} : \text{supp} \|\varphi\|_U = T \pmod{\mu}, \quad (3)$$

в частности, если

$$\forall \gamma \in P_N : \text{supp } P\Psi(\gamma) = T \pmod{\mu}. \quad (4)$$

Отметим, что теорема 2 является развитием теоремы 3 [8], что подтверждает её методологическую важность в математическом (апостериорном) моделировании сложных динамических систем [7, 8, 17, 19, 20]. Одним из приложений этого результата (с учетом теоремы 3 [22, с. 61] и следствия 5.3 [23, с. 137]) является следующее геометрическое утверждение.

Следствие 2. Если при выполнении (3) или (4) оператор $P\Psi$ взаимно-однозначный, то $P\Psi$ – гомеоморфизм, а фундаментальная группа метрического пространства $(P\Psi[P_N], \rho_T)$ изоморфна аддитивной группе целых чисел $\mathbb{Z}$ при $\dim \text{Span } N = 2$ и группе вычетов $\mathbb{Z}_2$ при $\dim \text{Span } N \geq 3$, причем, пространство $(P\Psi[P_N], \rho_T)$ ориентируемо, если размерность линейной оболочки $\text{Span } N$ четная, и неориентируемо, если эта размерность нечетная.

³ Инвариантность предполагает $\rho_T(f + g, g + g) = \rho_T(f, g)$ для любых $f, g, q \in L_+(T, R)$. Вариант неинвариантной неполной метрики, обеспечивающей непрерывность оператора Релея–Ритца, рассмотрен в [18].

Принимая во внимание, что непрерывная вещественная функция на компактном пространстве достигает своих наибольшего и наименьшего значений, приходим к заключению:

Следствие 3. В положении следствия 2 для случая, когда $1 \leq \dim P_N < \aleph_0$ и при наличии $\sup_L P\Psi[P_N]$, найдутся такие точки $\gamma', \gamma'' \in P_N$, что будет

$$\begin{aligned} \rho_T(P\Psi(\gamma'), \chi_\emptyset) &= \sup \{ \rho_T(P\Psi(\gamma), \chi_\emptyset) : \gamma \in P_N \} \leq \rho_T(\sup_L P\Psi[P_N], \chi_\emptyset) < \mu(T), \\ \rho_T(P\Psi(\gamma''), \sup_L P\Psi[P_N]) &= \inf \{ \rho_T(P\Psi(\gamma), \sup_L P\Psi[P_N]) : \gamma \in P_N \} \geq 0. \end{aligned}$$

Заметим, что включение $P\Psi(\gamma') \in L_2(T, R)$ не гарантирует вложение $\mathcal{R}(P\Psi[P_N]) \subset L_2(T, R)$ (см. пример 1 из [8]). При этом отметим, что случай $\dim P_N = 0$ приводит к положению

$$\begin{aligned} \sup_L P\Psi[P_N] &= P\Psi[P_N] = \left\| \hat{A} d^2 x / dt^2 \right\|_X / (\|dx/dt\|_X^2 + \|x\|_X^2 + \|u\|_Y^2 + \|x\|_X^4 + \\ &+ \|x\|_X^2 \|dx/dt\|_X^2 + \|dx/dt\|_X^4 + \|E(u)\|_X^2 \|y\|_X^2 + \|E(u)\|_X^2 \|dy/dt\|_X^2)^{1/2}. \end{aligned} \quad (5)$$

В контексте теорем 1, 2 можно уточнить условия существования решетки $\mathcal{R}(P\Psi[P_N])$. В качестве отправной точки введем вспомогательную конструкцию: для натурального i обозначим через W_i некоторое конечное i^1 -плотное подмножество в метрическом пространстве $(P\Psi[P_N], \rho_T)$; подмножество W_i найдется в силу теоремы 2. Ниже $\lim_{\rho_T} \{\xi_n\}$ означает предел последовательности $\{\xi_n\} \subset L_+(T, R)$ в топологии, индуцированной метрикой ρ_T .

Теорема 3. Пусть $\{W_i\}_{i=1, \dots, n}$, $W_i = \{\zeta_1, \dots, \zeta_{k_i}\} \subset P\Psi[P_N]$ и

$$f_n := \xi_1 \vee \dots \vee \xi_n, \quad \xi_i = \zeta_1 \vee \dots \vee \zeta_{k_i}, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Тогда конус $L_+(T, R)$ содержит решетку $\mathcal{R}(P\Psi[P_N])$, если и только если

$$\rho_T(f_n, f_m) \rightarrow 0 \quad (n, m \rightarrow \infty),$$

причём БНДР-разрешимость приобретает вид: пара $(N, \hat{A})$ обладает дифференциальной реализацией (1) тогда и только тогда, когда $\lim_{\rho_T} \{f_n\} \in L_2(T, R)$, что равносильно

$$\mathcal{R}(P\Psi[P_N]) \subset L_2(T, R).$$

В завершении приведем примеры, снимающие возможное представление, что выше особое удавление мы всюду делали исключительно на идейном аспекте каждого понятия, тем самым невольно пренебрегая его рассмотрением с вычислительной точки зрения; всюду ниже считаем, что моделирование осуществляется с нулевым запаздыванием $\bar{\tau} = 0$ (т.е. $y(\cdot) = x(\cdot)$).

Пример 1. Пусть $T = [0, 10]$, $Y := X$, $\hat{A}$ – оператор гомотетии с единичным коэффициентом [20, с. 87], $A_1 = 0 \in L(X, X)$, $D_1 = D_3 = D_4 = D_5 = 0 \in \mathcal{L}(X^2, X)$, $e \in X, \|e\|_X = 1$,

$$t \mapsto u(t) = 0 \in L_2(T, X), \quad t \mapsto x(t) = (t \sin t)e.$$

Тогда функция

$$f := \sup_L P\Psi(P_N) = \|d^2 x / dt^2\|_X (\|x\|_X^2 + \|x\|_X^2 \|dx/dt\|_X^2)^{-1/2} \quad (\text{см. рис. 1})$$

не принадлежит пространству $L_2(T, R)$ и, следовательно, согласно теореме 1 и формуле (5), реализация (1) для неуправляемого процесса $N = \{(u, x)\}$ не существует.

Пример 2. Изменим постановку примера 1 тем, что

$$t \mapsto u(t) = (t \sin^2 t + 2^{-1} t^2 \sin 2t + \cos t)e.$$

Тогда (см. рис. 2) приходим к

$$f := \sup_L P\Psi(P_N) = \|d^2 x / dt^2\|_X (\|x\|_X^2 + \|x\|_X^2 \|dx/dt\|_X^2 + \|u\|_Y^2)^{-1/2} \in L_2(T, R)$$

и значит реализация (1) для управляемого процесса $N = \{(u, x)\}$ существует; нетрудно установить, что

$$d^2 x / dt^2 + x = 2u - 2D_2(x, dx/dt),$$

где $D_2 = \langle \cdot, \cdot \rangle_X e, \langle \cdot, \cdot \rangle_X$ – скалярное произведение в пространстве X

Для геометрической интерпретации примеров 1, 2 напрашивается язык иллюстраций:

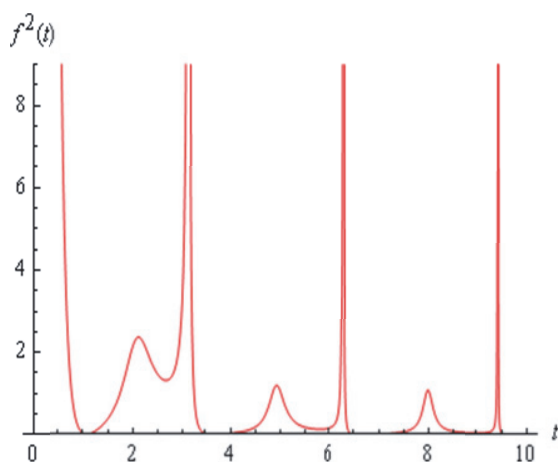


Рис. 1. $f^2(t) = (2 \cos t - t \sin t)^2 \times$
 $\times ((t \sin t)^2 + (t \sin t)^2 (\sin t + t \cos t)^2)^{-1}$

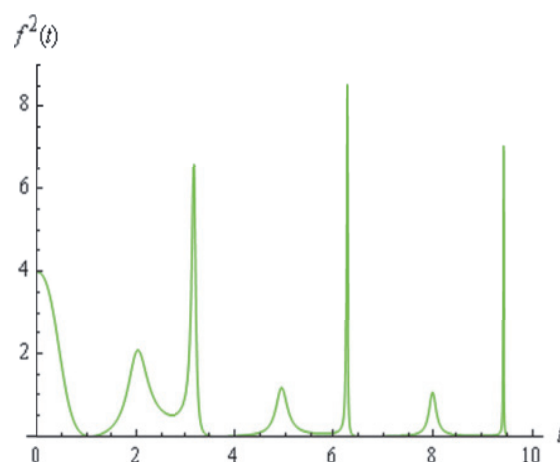


Рис. 2. $f^2(t) = (2 \cos t - t \sin t)^2 \times ((t \sin t)^2 +$
 $+ (t \sin t)^2 (\sin t + t \cos t)^2 + (t \sin^2 t + 2^{-1} t^2 \sin 2t + \cos t)^2)^{-1}$

Отметим, что для более сложных вариантов задания пары $(t \mapsto u(t), t \mapsto x(t))$ символьные вычисления функции $f^2(\cdot)$ (аналогичной рис. 1, 2) можно проводить средствами специализированной компьютерной алгебры [24]. В данном контексте анализ разрешимости БНДР-задачи примеров 1, 2 можно модифицировать для качественного анализа редукции точных многомерных решений диффузии со степенными нелинейностями [25] к задаче Коши для счетной системы обыкновенных дифференциальных уравнений с полилинейной структурой.

Пример 3. В силу (4) и теоремы 1 можно показать [26], что любой динамический процесс

$$(u, x), x \in AC^1(T, X), u \in L_2(T, Y),$$

обладающий дифференциальной реализацией (1), имеет реализацию в классе *линейных* систем (т.е. с нулевыми операторами D_1, D_2, D_3, D_4, D_5) – факт полезный, поскольку имеет применение в рамках метода последовательных приближений [27, с. 173] (известной как метод Пикара [20, с. 215]), используемого для построения оптимального программного управления в решении двухточечной краевой задачи по технологии «квазилинеаризации» [27, сс. 168, 174].

Представляется, что приведенные выше иллюстрационные примеры дают дополнительные основания для дальнейшего изучения БНДР-моделей с *обобщенным запаздыванием* [28, с. 440] в контексте развития тензорного анализа квазилинейных векторных полей [29], в том числе, с минимальной операторной нормой (теорема 5 [7]), включая вполне непрерывные БНДР-системы (теорема 4 [30]). В частности, для апостериорного моделирования нестационарных билинейных динамических систем, траектории которых суть аналитические функции, что *a priori* обеспечивает условие (2) теоремы 2 в силу принципа изолированности нулей [31, с. 228].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

К 1970-м годам сложилось впечатление, что та часть качественной теории обратных задач системного анализа, которую принято называть *теорией абстрактной реализации* (§ 10.6 [27]) динамических систем с непрерывным временем, в целом завершена и стоит ожидать лишь относительно второстепенных улучшений; это впечатление усиливалось заявлениями основателей теории дифференциальной реализации: 1969 г., Р. Калман [27, с. 268]: «... в § 10.13 мы дадим новое и (надемся) *исчерпывающее* изложение теории реализации линейных систем с непрерывным временем» (курсив наш). Таким образом, в определенном смысле теория реализации линейных стационарных систем во второй половине 20-го века занимала в общей теории систем место, аналогичное месту теоретической механики в физике, когда и там, и там создалось впечатление полной и окончательной завершенности и логической строгости.

Настоящий период развития ОТДР в нелинейной и бесконечномерной постановке в значительной мере связан с созданием нового языка – теории расширений M_2 -операторов [7]. Данная теория существенным образом перестроила и укрепила теоретико-системные основания ОТДР и обеспечила гармоничную связь геометрических идей M_2 -продолжимости с методами теории эволюционных

дифференциальных уравнений в бесконечномерных пространствах [32], делая упор на приложения [2], а не на достижение максимальной общности изложения. К тому же, не будет преувеличением заметить, что «билинейный аппарат» ОТДР, получивший продвижение выше, доставляет, по меньшей мере, эстетическое удовлетворение; аналитик, преследующий чисто эстетические цели⁴, как правило, содействует созиданию нового формального языка, более приспособленного к тому, чтобы удовлетворить математические запросы физика, при этом служа хорошим современным введением в геометрические разделы ОТДР.

Последнее обстоятельство не могло не наложить свой отпечаток и на содержание данной работы, а именно, – так как во многих практически важных задачах реализации дифференциального представления моделируемых континуальных пучков программно-управляемых динамических процессов необходимо учитывать нелинейную взаимосвязь как от самой траектории и скорости движения на ней, так и от программного управления, то выше основное внимание было сосредоточено на модели реализации, зависящей от *пяти* нестационарных билинейных структур. Первая из них задана на самой траектории, второй билинейный оператор зависит от траектории и скорости движения по ней, третий билинейный оператор зависит только от скорости движения по этой траектории и два других учитывают эти переменные в связи с влиянием на них программного управления и эффекта запаздывания передачи сигналов.

Для того чтобы продвинуться дальше, можно указать то теоретико-системное направление, которое может составить алгебраическую основу (без чрезмерного нагнетания технических средств алгебраической геометрии) следующего этапа развития теории дифференциальной реализации высших порядков [33]. А именно, предметом качественных исследований может стать переход от *билинейной* структуры нелинейных связей дифференциального представления модели реализации к *полилинейным* связям [9, 34]. Методологически данный переход состоит в использовании в рамках ОТДР геометрического языка тензорных структур пространств Фока [4, с. 68] и проективных представлений [15, с. 238] в контексте исследования принципа максимума энтропии [11] с помощью компьютерной алгебры, подобно [24].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Месарович М. Общая теория систем: Математические основы / М. Месарович, Я. Такахара. – М.: Мир, 1978. – 312 с.
2. Ahmed N.U. Optimization and Identification of Systems Governed by Evolution Equations on Banach Space. – New York: John Wiley and Sons, 1988. – 187 p.
3. Канторович, Л.В. Функциональный анализ / Л.В. Канторович, Г.П. Акилов. – М.: Наука, 1977. – 744 с.
4. Рид, М. Методы современной математической физики. Том 1. Функциональный анализ / М. Рид, Б. Саймон. – М.: Мир, 1977. – 360 с.
5. Кострикин, А.И. Линейная алгебра геометрия / А.И. Кострикин, Ю.И. Манин. – М.: Наука, 1986. – 304 с.
6. Гольдман, Н.Л. Определение коэффициентов при производной по времени в квазилинейных параболических уравнениях в пространствах Гёльдера / Н.Л. Гольдман // Дифференциальные уравнения. – 2012. – Т. 48. – № 12. – С. 1597–1606.
7. Русанов, В.А. Существование дифференциальной реализации динамической системы в банаховом пространстве в конструкциях расширений до M_p -операторов / В.А. Русанов, А.В. Лакеев, Ю.Э. Линке // Дифференциальные уравнения. – 2013. – Т. 49. – № 3. – С. 358–370.
8. Русанов, В.А. К геометрическим основам дифференциальной реализации динамических процессов в гильбертовом пространстве / В.А. Русанов, А.В. Данеев, Ю.Э. Линке // Кибернетика и системный анализ. – 2017. – Т. 53. – № 4. – С. 71–83.
9. Rusanov V.A., Daneev A.V., Lakeyev A.V., Sizykh V.N. Higher-Order Differential Realization of Polylinear-Controlled Dynamic Processes in a Hilbert Space // Advances in Differential Equations and Control Processes. – 2018. – V. 19. – N 3. – P. 263–274.

⁴ Часто математические модели и законы постулируются на основе философии Аристотеля и эстетического подхода и только позднее выясняется, что они также могли быть до некоторой степени выведены из уже имеющихся (или пополненных) знаний и наблюдаемых фактов. В качестве примера можно указать на историю открытия закона всемирного тяготения [35, с. 115], сформулированного Гуком в одном из писем Ньютону. Гук считал [36, с. 410], что сила притяжения тела распространяется равномерно по сфере, окружающей (равноудалено) это тело, и, следовательно, обратно пропорциональна квадрату радиуса данной сферы; т.е. фактически Гук утверждал, что этот закон является следствием *трехмерной геометрии* окружающего физического пространства. Это побудило Ньютона отказаться от его намерения оставить занятия наукой, в итоге, по существу, послужив для него поводом написания знаменитых “Principia” [37], с которых практически началась математическая физика.

10. Аниконов, Ю.Е. Об аналитических методах в теории обратных задач для гиперболических уравнений / Ю.Е. Аниконов, М.В. Нецадим // Сибирский. журнал индустриальной математики. – 2011. – Т. 14. – № 1. – С. 27–39; № 2. – С. 28–33.
11. Rusanov V.A., Banshchikov A.V., Daneev A.V., Lakeyev A.V. Maximum Entropy Principle in the Differential Second-Order Realization of a Nonstationary Bilinear System // *Advances in Differential Equations and Control Processes*. – 2019. – V. 20. – N 2. – P. 223–248.
12. Daneev, A.V., Lakeyev A.V., Rusanov V.A. Existence of a Bilinear Differential Realization in the Constructions of Tensor Product of Hilbert Spaces // *WSEAS Transactions on Mathematics*. – 2020. – V. 19. – P. 99–107.
13. Прасолов, В.В. Элементы комбинаторной и дифференциальной топологии / В.В. Прасолов. – М.: МЦНМО, 2014. – 360 с.
14. Daneev A.V., Lakeyev A.V., Rusanov V.A., Plesnyov P.A. Differential non-autonomous representation of the integrative activity of a neural population by a bilinear second-order model with delay // *Lecture Notes in Networks and Systems*. Springer, Berlin, New York. – 2022. – Vol. 319, – P. 191–199.
15. Кириллов, А.А. Элементы теории представлений / А.А. Кириллов. – М.: Наука, 1978. – 344 с.
16. Иосида, К. Функциональный анализ / К. Иосида. – М.: Мир, 1967. – 624 с.
17. Rusanov V.A., Antonova L.V., Daneev A.V. Inverse Problem of Nonlinear Systems Analysis: A Behavioral Approach // *Advances in Differential Equations and Control Processes*. – 2012. Vol. – 10. N – 2. – P. 69–88.
18. Лакеев, А.В. Метрические свойства оператора Релея–Ритца / А.В. Лакеев, Ю.Э. Линке, В.А. Русанов // *Известия вузов. Математика*. – 2022. – № 9 – С. 54–63.
19. Rusanov V.A., Daneev A.V., Lakeyev A.V., Linke Yu.É. On the Differential Realization Theory of Nonlinear Dynamic Processes in Hilbert Space // *Far East Journal of Mathematical Sciences*. – 2015. – V. 97. – N 4. – P. 495–532.
20. Русанов, В.А. К разрешимости дифференциальной реализации минимального динамического порядка семейства нелинейных процессов «вход–выход» в гильбертовом пространстве / В.А. Русанов, А.В. Лакеев, Ю.Э. Линке // *Дифференциальные уравнения*. – 2015. – Т. 51. – № 4. – С. 524–537.
21. Эдвардс, Р. Функциональный анализ: Теория и приложения / Р. Эдвардс. – М.: Мир, 1969. – 1072 с.
22. Фоменко, А.Т. Курс гомотопической топологии / А.Т. Фоменко, Д.Б. Фукс. – М.: Наука, 1989. – 528 с.
23. Новиков, С.П. Современные геометрические структуры и поля / С.П. Новиков, И.А. Тайманов. – М.: МЦНМО, 2014. – 584 с.
24. Банициков А.В., Иртегов В.Д., Титоренко Т.Н. Программный комплекс для моделирования в символьном виде механических систем и электрических цепей // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ. №2016618253 от 25.07.2016. Федеральная служба по интеллектуальной собственности (РОСПАТЕНТ).
25. Косов, А.А. О точных многомерных решениях одной нелинейной системы уравнений реакции–диффузии / А.А. Косов, Э.И. Семёнов // *Дифференциальные уравнения*. – 2018. – Т. 54. – № 1. – С. 108–122.
26. Lakeyev A.V., Rusanov V.A., Daneev A.V., Aksenov Yu.D. On Realization of the Superposition Principle for a Finite Bundle of Integral Curves of a Second-Order Bilinear Differential System // *Advances in Differential Equations and Control Processes*. – 2023. – V. 30. – N 2. – P. 169–197.
27. Калман, Р. Очерки по математической теории систем / Р. Калман, П. Фалб, М. Арбиб. – М.: Мир, 1971. – 400 с.
28. Варга, Дж. Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями / Дж. Варга. – М.: Наука, 1977. – 624 с.
29. Rusanov V.A., Daneev A.V., Lakeyev A.V., Linke Yu.É. To Existence of a Nonstationary Quasi-Linear Vector Field Realizing the Expansion of a Control Trajectory Bundle in Hilbert Space // *WSEAS Transactions on Systems*. – 2020. – V. 19. – P. 115–120.
30. Rusanov V.A., Lakeyev A.V., Banshchikov A.V., Daneev A.V. On the Bilinear Second Order Differential Realization of a Infinite-Dimensional Dynamical System: An Approach Based on Extensions to M_2 -Operators // *Fractal and Fractional*. – 2023. – V. 7. – N 4. – P. 310–327.
31. Дьедонне, Ж. Основы современного анализа / Ж. Дьедонне. – М.: Мир, 1964. – 431 с.
32. Далецкий, Ю.Л. Меры и дифференциальные уравнения в бесконечномерных пространствах / Ю.Л. Далецкий, С.В. Фомин. – М.: Наука, 1983. – 384 с.
33. Ван дер Шафт А. К теории реализации нелинейных систем, описываемых дифференциальными уравнениями высшего порядка / Ван дер Шафт А. // *Теория систем. Математические методы и моделирование* / Пер. с англ. сб. статей (ред. А.Н. Колмогоров, С.П. Новиков). – М.: Мир, 1989. – С. 192–237. [Van der Schaft A.J. On Realization of Nonlinear Systems Described by Higher-Order Differential Equations // *Mathematical Systems Theory*. – 1987 – V. 19. – P. 239–275.]
34. Лакеев, А.В. Оператор Релея–Ритца в обратных задачах полилинейных неавтономных эволюционных уравнений высших порядков / А.В. Лакеев, Ю.Э. Линке, В.А. Русанов // *Математические труды*. – 2023. – Т. 26. – № 2. – С. 162–176.
35. Арнольд, В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения / В.И. Арнольд. – М.: МЦНМО, 2012. – 344 с.
36. Клайн, М. Математика. Утрата определенности / М. Клайн. – М.: Мир, 1984. – 434 с.
37. Newton I. *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, 1686; русский перевод: Ньютон, И. Математические начала натуральной философии [пер. А.Н. Крылова] / И. Ньютон // В кн.: *Собрание трудов академика А.Н. Крылова*. – Т. VII. – М.–Л.: Изд. АН СССР. – 1936.

TO A GENERAL THEORY OF DIFFERENTIAL REALIZATION OF BILINEAR NONAUTONOMOUS EVOLUTIONARY EQUATIONS OF THE SECOND ORDER WITH DELAY

© 2025 R.A. Daneev¹, V.A. Rusanov²

¹East Siberian Institute of the Ministry of Internal Affairs of Russia, Irkutsk, Russia

²Institute of System Dynamics and Control Theory named after V.M. Matrosov SB RAS, Irkutsk, Russia

In this paper, a characteristic feature of solvability of the problem of differential realization of a continuous bundle of controlled trajectory curves in the class of bilinear non-autonomous ordinary differential equations (with and without delay) of the second order in a separable Hilbert space is established. The problem under consideration belongs to the type of inverse problems for an additive combination of non-stationary linear and bilinear operators of an evolution equation in a Hilbert space. The metalanguage of this theory is the construction of tensor products of Hilbert spaces, the structure of lattices with orthocomplement, the theory of extension of M_2 -operators and the functional apparatus of the nonlinear Rayleigh–Ritz operator. It is shown that in the case of a finite bundle of trajectory curves, the presence of the sublinearity property of this operator allows us to obtain sufficient conditions for the existence of such realizations. Along the way, topological-metric conditions for the continuity of the projectivization of the nonlinear Rayleigh–Ritz operator are substantiated with the calculation of the fundamental group of its image.

Keywords: tensor analysis, second-order evolution equations with delay, bilinear non-autonomous differential realization, Rayleigh–Ritz functional operator.

DOI: 10.37313/1990-5378-2025-27-5-217-229

EDN: ZJNGLI

REFERENCES

1. *Mesarovich M.* Obshchaya teoriya sistem: Matematicheskie osnovy / M. Mesarovich, Ya. Takahara. – M.: Mir, 1978. – 312 s.
2. *Ahmed N.U.* Optimization and Identification of Systems Governed by Evolution Equations on Banach Space. – New York: John Wiley and Sons, 1988. – 187 p.
3. *Kantorovich, L.V.* Funkcional'nyj analiz / L.V. Kantorovich, G.P. Akilov. – M.: Nauka, 1977. – 744 s.
4. *Rid, M.* Metody sovremennoj matematicheskoy fiziki. Tom 1. Funkcional'nyj analiz / M. Rid, B. Sajmon. – M.: Mir, 1977. – 360 s.
5. *Kostrikin, A.I.* Linejnaya algebra geometriya / A.I. Kostrikin, Yu.I. Manin. – M.: Nauka, 1986. – 304 s.
6. *Gol'dman, N.L.* Opredelenie koefitsientov pri proizvodnoj po vremeni v kvazilinejnyh parabolicheskikh uravneniyah v prostranstvakh Gyl'dera / N.L. Gol'dman // Differentsial'nye uravneniya. – 2012. – T. 48. – № 12. – С. 1597–1606.
7. *Rusanov, V.A.* Sushchestvovanie differentsial'noj realizacii dinamicheskoy sistemy v banahovom prostranstve v konstrukciyah rasshirenij do M_p -operatorov / V.A. Rusanov, A.V. Lakeev, Yu.E. Linke // Differentsial'nye uravneniya. – 2013. – T. 49. – № 3. – С. 358–370.
8. *Rusanov, V.A.* K geometricheskim osnovam differentsial'noj realizacii dinamicheskikh processov v gil'bertovom prostranstve / V.A. Rusanov, A.V. Daneev, Yu.E. Linke // Kibernetika i sistemnyj analiz. – 2017. – T. 53. – № 4. – С. 71–83.
9. *Rusanov V.A., Daneev A.V., Lakeev A.V., Silykh V.N.* Higher-Order Differential Realization of Polylinear-Controlled Dynamic Processes in a Hilbert Space // Advances in Differential Equations and Control Processes. – 2018. – V. 19. – N 3. – P. 263–274.
10. *Anikonov, Yu.E.* Ob analiticheskikh metodah v teorii obratnykh zadach dlya giperbolicheskikh uravnenij / Yu.E. Anikonov, M.V. Neshchadim // Sibirskij zhurnal industrial'noj matematiki. – 2011. – T. 14. – № 1. – С. 27–39, № 2. – С. 28–33.
11. *Rusanov V.A., Banskchikov A.V., Daneev A.V., Lakeev A.V.* Maximum Entropy Principle in the Differential Second-Order Realization of a Nonstationary Bilinear System // Advances in Differential Equations and Control Processes. – 2019. – V. 20. – N 2. – P. 223–248.
12. *Daneev, A.V., Lakeev A.V., Rusanov V.A.* Existence of a Bilinear Differential Realization in the Constructions of Tensor Product of Hilbert Spaces // WSEAS Transactions on Mathematics. – 2020. – V. 19. – P. 99–107.
13. *Prasolov, V.V.* Elementy kombinatornoj i differentsial'noj topologii / V.V. Prasolov. – M.: MCNMO, 2014. – 360 s.
14. *Daneev A.V., Lakeev A.V., Rusanov V.A., Plesnyov P.A.* Differential non-autonomous representation of the integrative activity of a neural population by a bilinear second-order model with delay // Lecture Notes in Networks and Systems. Springer, Berlin, New York. – 2022. – Vol. 319, – P. 191–199.
15. *Kirillov, A.A.* Elementy teorii predstavlenij / A.A. Kirillov. – M.: Nauka, 1978. – 344 s.
16. *Iosida, K.* Funkcional'nyj analiz / K. Iosida. – M.: Mir, 1967. – 624 s.
17. *Rusanov V.A., Antonova L.V., Daneev A.V.* Inverse Problem of Nonlinear Systems Analysis: A Behavioral Approach // Advances in Differential Equations and Control Processes. – 2012. Vol. – 10. N – 2. – P. 69–88.
18. *Lakeev, A.V.* Metricheskie svoystva operatora Releya–Ritca / A.V. Lakeev, Yu.E. Linke, V.A. Rusanov // Izvestiya vuzov. Matematika. – 2022. – № 9 – С. 54–63.

19. Rusanov V.A., Daneev A.V., Lakeev A.V., Linke Yu.É. On the Differential Realization Theory of Nonlinear Dynamic Processes in Hilbert Space // Far East Journal of Mathematical Sciences. – 2015. – V. 97. – N 4. – P. 495–532.
20. Rusanov, V.A. K razreshimosti differentsial'noj realizacii minimal'nogo dinamicheskogo poryadka semejstva nelinejnyh processov «vход–vyход» v gil'bertovom pro–stranstve / V.A. Rusanov, A.V. Lakeev, Yu.E. Linke // Differentsial'nye uravneniya. – 2015. – T. 51. – № 4. – S. 524–537.
21. Edvards, R. Funktsional'nyj analiz: Teoriya i prilozheniya / R. Edvards. – M.: Mir, 1969. – 1072 s.
22. Fomenko, A.T. Kurs gomotopicheskoy topologii / A.T. Fomenko, D.B. Fuks. – M.: Nauka, 1989. – 528 s.
23. Novikov, S.P. Sovremennye geometricheskie struktury i polya / S.P. Novikov, I.A. Tajmanov. – M.: MCNMO, 2014. – 584 s.
24. Banshchikov A.V., Irtegov V.D., Titorenko T.N. Programmnyj kompleks dlya modelirovaniya v simvol'nom vide mekhanicheskikh sistem i elektricheskikh cepej // Svidetel'stvo o gosudarstvennoj registracii programmy dlya EVM. №2016618253 ot 25.07.2016. Federal'naya sluzhba po intellektual'noj sobstvennosti (ROSPATENT).
25. Kosov, A.A. O tochnyh mnogomernyh resheniyah odnoj nelinejnoj sistemy uravne'nij reakcii' diffuzii / A.A. Kosov, E.I. Semyonov // Differentsial'nye uravneniya. – 2018. – T. 54. – № 1. – S. 108–122.
26. Lakeyev A.V., Rusanov V.A., Daneev A.V., Aksenov Yu.D. On Realization of the Super–position Principle for a Finite Bundle of Integral Curves of a Second–Order Bilinear Differential System // Advances in Differential Equations and Control Processes. – 2023. – V. 30. – N 2. – P. 169–197.
27. Kalman, R. Ocherki po matematicheskoy teorii sistem / R. Kalman, P. Falb, M. Arbib. – M.: Mir, 1971. – 400 s.
28. Varga, Dzh. Optimal'noe upravlenie differentsial'nymi i funktsional'nymi uravneniyami / Dzh. Varga. – M.: Nauka, 1977. – 624 s.
29. Rusanov V.A., Daneev A.V., Lakeyev A.V., Linke Yu.É. To Existence of a Nonstationary Quasi–Linear Vector Field Realizing the Expansion of a Control Trajectory Bundle in Hilbert Space // WSEAS Transactions on Systems. – 2020. – V. 19. – P. 115–120.
30. Rusanov V.A., Lakeyev A.V., Banshchikov A.V., Daneev A.V. On the Bilinear Second Order Differential Realization of a Infinite–Dimensional Dynamical System: An Approach Based on Extensions to M2–Operators // Fractal and Fractional. – 2023. – V. 7. – N 4. – P. 310–327.
31. D'edonne, Zh. Osnovy sovremennogo analiza / Zh. D'edonne. – M.: Mir, 1964. – 431 s.
32. Daleckij, Yu.L. Mery i differentsial'nye uravneniya v beskonechnomernyh prostranstvakh / Yu.L. Daleckij, S.V. Fomin. – M.: Nauka, 1983. – 384 s.
33. Van der Shaft A. K teorii realizacii nelinejnyh sistem, opisyyaemyh differentsial'nymi uravneniyami vysshego poryadka / Van der Shaft A. // Teoriya sistem. Matematicheskie metody i modelirovanie / Per. s angl. sb. statej (red. A.N. Kolmogorov, S.P. Novikov). – M.: Mir, 1989. – S. 192–237. [Van der Shaft A.J. On Realization of Nonlinear Systems Described by Higher–Order Differential Equations // Mathematical Systems Theory. – 1987 – V. 19. – P. 239–275.]
34. Lakeev, A.V. Operator Releya–Ritca v obratnykh zadachah polilinejnyh neavtonomnyh evolyucionnykh uravnenij vysshih poryadkov / A.V. Lakeev, Yu.E. Linke, V.A. Rusanov // Matematicheskie trudy. – 2023. – T. 26. – № 2. – S. 162–176.
35. Arnol'd, V.I. Obyknoennye differentsial'nye uravneniya / V.I. Arnol'd. – M.: MCNMO, 2012. – 344 s.
36. Klajn, M. Matematika. Utrata opredelennosti / M. Klajn. – M.: Mir, 1984. – 434 s.
37. Newton I. Philosophiae Naturalis Principia Mathematica, 1686; russkij perevod: N'yuton, I. Matematicheskie nachala natural'noj filosofii [per. A.N. Krylova] / I. N'yuton // V kn.: Sobranie trudov akademika A.N. Krylova. – T. VII. – M.–L.: Izd. AN SSSR. – 1936.