

УДК 004.942

МЕТОД МОДЕЛИРОВАНИЯ АСИММЕТРИЧНЫХ РЕЗОНАНСОВ В СПЕКТРАХ МНОГОМОДОВЫХ ПЛАЗМОННЫХ СЛОИСТЫХ СТРУКТУР НА ОСНОВЕ МЕТОДА ПЕРЕДАТОЧНЫХ МАТРИЦ

© 2025 Д.В. Нестеренко

Самарский национальный исследовательский университет им. академика С.П. Королева,
г. Самара, Россия

Статья поступила в редакцию 02.12.2025

В пространственных спектрах пропускания или отражения многомодовых плазмонных слоистых структур, элементы которых допускают возбуждение отдельных плазмонных мод, а также их взаимосвязь, наблюдаются асимметричные резонансы. Традиционно для описания амплитуды полей для фиксированных спектральных параметров в таких системах слоев используется метод передаточных матриц, что не раскрывает природу возникающих резонансов. Ранее были разработаны аналитические аппроксимации асимметричных резонансов Фано для одно- и двухмодовых систем, которые не могут быть расширены на системы с произвольным количеством слоев и возбуждаемых мод. В настоящей работе разработан новый математический метод получения аналитических выражений вида формул Фано как функций от геометрических и оптических параметров составных плазмонных систем. Для асимметричных резонансов в спектрах предлагается ввести представление поля как интерференцию резонансных и нерезонансных компонент в формализм метода передаточных матриц. Разработанный метод позволяет получить аналитические выражения для параметров формулы Фано, что необходимо для описания поведения таких резонансных характеристик составных плазмонных систем, как ширина, высота, максимальное усиление поля.

Ключевые слова: математический метод, поверхностные плазмоны, слоистые структуры, аппроксимация, резонансные характеристики.

DOI: 10.37313/1990-5378-2025-27-6-207-213

EDN: NKRBNQ

*Работа выполнена при поддержке Государственного задания №FSSS-2024-0016***ВВЕДЕНИЕ**

Оптические слоистые резонансные структуры широко применяются во многих приложениях в оптическом зондировании, спектроскопии, фильтрации и обработке данных [1–7]. Аналитическое описание соотношений между резонансными характеристиками и свойствами резонансных структур обеспечивает понимание природы резонансных явлений и свободу в проектировании структур. В отличие от дифракционных структур [8; 9], в случае слоистых резонансных структур точное решение для анализа интерференционных явлений может быть получено, например, методом передаточных матриц [10–13]. Однако, полученные численные решения для конкретных параметров падающего излучения и структур не представляют основу для физической интерпретации природы возбуждаемых резонансов.

Объяснение резонансного поведения поля в спектрах резонансных структур требует введения понятия мод, режимов распространения волн, который лежит в основе теории связанных мод [14; 15]. Теория связанных мод представляет собой универсальный подход, транслирующий дифференциальные уравнения, соответствующие феноменологическому описанию возбуждения, распространения и переизлучения мод, в аналитические соотношения для резонансных характеристик и форм резонансных линий в спектрах резонансных структур. Приближения, основанные на модальном формализме для поля в спектрах одно- и двухмодовых планарных плазмонных структур, ранее были получены аналитически в виде формулы Фано [16–21]. В полученных приближениях Фано коэффициенты этих приближений задаются аналитическими выражениями, характеризующими свойства формы линии основного резонанса, зависящие от оптических и геометрических параметров структур. Для структур, поддерживающих возбуждение произвольного числа мод, прямой вывод таких аналитических выражений с использованием традиционных подходов пока затруднителен. В данной работе предлагается подход к аналитическому анализу многомодовых планарных структур, основанный на представлении таких многослойных многомодовых структур в виде набора резонансных подсистем, разделенных нерезонансными подсистемами.

*Нестеренко Дмитрий Владимирович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры киберфотоники.
E-mail: nesterenko@ssau.ru*

ФОРМАЛИЗМ МЕТОДА ПЕРЕДАТОЧНЫХ МАТРИЦ 2×2 ДЛЯ СЛОИСТЫХ СИСТЕМ

Связь амплитуд волн на границе раздела двух слоев некоторой слоистой структуры, схематично показанных на рис. 1, записывается с использованием формализма метода передаточных матриц 2×2 в виде [15]

$$\begin{bmatrix} H_{l,l-1} \\ H_{l-1,l} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{l-1,l,l+1} & B_{l-1,l,l+1} \\ C_{l-1,l,l+1} & D_{l-1,l,l+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{l+1,l} \\ H_{l,l+1} \end{bmatrix}, \quad (1)$$

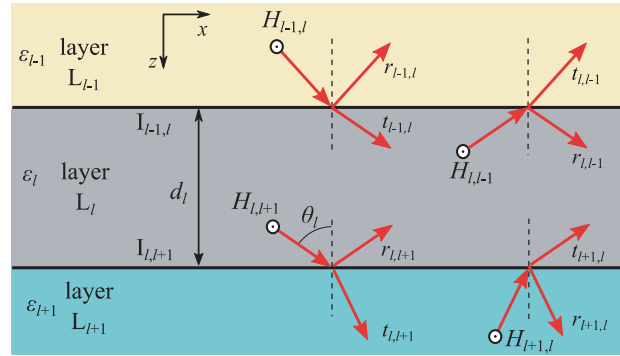


Рис. 1. Обозначения для случаев падения плоской волны на границы раздела слоев в трехслойных конфигурациях

где $H_{l-1,l}$ – комплексная амплитуда плоской волны, падающей в слое L_{l-1} на границу раздела слоёв L_{l-1} и L_l , коэффициенты матриц представлены выражениями

$$\begin{aligned} A_{l-1,l,l+1} &= v_l t_{l+1,l}, \quad B_{l-1,l,l+1} = v_l r_{l,l+1}, \\ C_{l-1,l,l+1} &= -v_l r_{l,l-1} t_{l+1,l} / t_{l-1,l}, \quad D_{l-1,l,l+1} = (1 - v_l^2 r_{l,l-1} r_{l,l+1}) / (v_l t_{l-1,l}), \end{aligned}$$

в которых используются следующие обозначения: $r_{l,l+1}$ – коэффициент отражения волны, распространяющейся в слое L_l , от границы раздела слоёв L_l и L_{l+1} , $t_{l,l+1}$ – коэффициент пропускания волны, распространяющейся в слое L_l , через границу раздела слоёв L_l и L_{l+1} , v_l – комплексный коэффициент трансляции амплитуды поля волны при её распространении в слое L_l между его границами. В случае возбуждения плазмонной моды на одной из границ раздела между слоем металла и диэлектрика, например на границе слоев L_l и L_{l+1} резонансная зависимость коэффициента отражения $\bar{r}_{l,l+1}$ от константы распространения возбуждающей волны вдоль границы раздела сред α записывается в виде суперпозиции резонансной и нерезонансной компонент [23]:

$$\bar{r}_{l,l+1} = r_{l,l+1}^{\text{BG_spp}} + \frac{\gamma_{l,l+1}^{\text{spp}} \kappa_{l,l+1}^{\text{spp}}}{\alpha - \gamma_{l,l+1}^{\text{spp}}}, \quad (2)$$

где $r_{l,l+1}^{\text{BG_spp}}$ – медленно меняющаяся нерезонансная компонента коэффициента отражения, $\gamma_{l,l+1}^{\text{spp}} = [\epsilon_l \epsilon_{l+1} / (\epsilon_l + \epsilon_{l+1})]^{1/2}$ – константа распространения моды, $\kappa_{l,l+1}^{\text{spp}} = 2(\gamma_{l,l+1}^{\text{spp}})^2 / (\epsilon_l - \epsilon_{l+1})$ – комплексный коэффициент возбуждения моды внешней волной, ϵ_l – диэлектрическая проницаемость слоя L_l . Здесь и далее коэффициенты, отмеченные верхней чертой, характеризуются резонансным поведением. Также резонансный характер имеют следующие коэффициенты $\bar{r}_{l+1,l} = -\bar{r}_{l,l+1}$, $\bar{t}_{l+1,l} = 1 - \bar{r}_{l,l+1}$, $\bar{t}_{l,l+1} = 1 + \bar{r}_{l,l+1}$. Например, в случае трёхслойной системы слоёв L_{l-1} – L_{l+1} падение волны, распространяющейся в слое L_{l-1} , возбуждает плазмонную моду на границе раздела слоя L_l конечной шириной h_l и слоя L_{l+1} . Традиционно решение находится для системы уравнений (1) в виде

$$\begin{bmatrix} H_{l,l-1} \\ H_{l-1,l} \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{T}}_l \begin{bmatrix} H_{l+1,l} \\ H_{l,l+1} \end{bmatrix}, \quad (3)$$

где $\bar{\mathbf{T}}_l = \begin{bmatrix} \bar{A}_l & \bar{B}_l \\ \bar{C}_l & \bar{D}_l \end{bmatrix}$ – матрица, описывающая трансляцию амплитуд колебаний волн в слое L_l . Реше-

ние для амплитуды отраженной волны представляется как $H_{l,l-1} = \bar{B}_l \bar{D}_l^{-1} H_{l-1,l}$. Поскольку в этом выражении присутствуют резонансные компоненты, то и поведение решения также принимает такой вид, интенсивность которого описывается резонансным профилем Фано.

МАТРИЧНЫЙ ФОРМАЛИЗМ В СЛУЧАЕ КОМПОЗИТНЫХ РЕЗОНАНСНЫХ СИСТЕМ

Для описания природы резонансного поведения амплитуд поля в составных системах, допускающих взаимосвязь плазмонных мод, рассмотрим элементарную структуру, допускающей возбуждение одной плазмонной моды. Такая элементарная структура представляется набором двух слоев L_l и L_{l+1} с толщинами h_l и h_{l+1} , соответственно. Предположим, что плазмонная мода может распространяться в этой подсистеме вдоль границы раздела сред L_l и L_{l+1} . В общем случае, рассматриваемая элементарная структура заключена между некими внешними к ней слоями. Далее эти внешние слои с меньшим, чем l , и большим, чем $l+1$, индексами обозначаются как L^- и L^+ , соответственно.

Трансляция амплитуд поля волн на противоположных границах слоёв рассматриваемой элементарной системы может быть записана в виде матриц 2×2 как

$$\begin{bmatrix} H_{\text{out}}^- \\ H_{\text{in}}^- \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{T}}_{l,l+1}^{\text{spp}} \begin{bmatrix} H_{\text{in}}^+ \\ H_{\text{out}}^+ \end{bmatrix}, \quad (4)$$

где H_{out}^- и H_{in}^- – амплитуды волн, распространяющихся во внешнем к системе слое L^- от и на границу раздела слоёв L^- и L_l , соответственно, H_{out}^+ и H_{in}^+ – амплитуды волн, распространяющихся во внешнем к системе слое L^+ от и на границу раздела слоёв L^+ и L_{l+1} , соответственно, $\bar{\mathbf{T}}_{l,l+1}^{\text{spp}} = \mathbf{T}^- \bar{\mathbf{T}}_l \bar{\mathbf{T}}_{l+1} \mathbf{T}^+$ – композитная матрица, полностью описывающая резонансное поведение в элементарной структуре, допускающей возбуждение плазмонной моды, при этом $\mathbf{T}^- = \begin{bmatrix} A^- & B^- \\ C^- & D^- \end{bmatrix}$ и $\mathbf{T}^+ = \begin{bmatrix} A^+ & B^+ \\ C^+ & D^+ \end{bmatrix}$ – матрицы, описывающие трансляцию амплитуд колебаний волн при границах раздела слоёв L^- и L_l , L^+ и L_{l+1} , соответственно.

В случае составных резонансных систем, включающих некоторые резонансные подсистемы, матрица $\bar{\mathbf{T}}^{\text{spp}}$ соответствует одной из этих подсистем. Передаточные матрицы $\mathbf{T}^-$ и $\mathbf{T}^+$, входящие в композитную матрицу $\bar{\mathbf{T}}^{\text{spp}}$, описывают распространение поля в прилегающих к ней остальных подсистемах. Прилегающие подсистемы могут состоять из одного и более слоя, и также, в свою очередь, могут быть резонансными. $\mathbf{T}^-$ и $\mathbf{T}^+$ могут представляться произведением передаточных матриц, соответствующих определенным слоям или подсистемам. В случае резонансных подсистем, они являются композитными, например вида $\bar{\mathbf{T}}^{\text{spp}}$, для слоёв подсистем, допускающих возбуждение мод.

Матричный вид системы уравнений (4) позволяет получить аналитические выражения для коэффициентов композитной матрицы в виде суперпозиции нерезонансной и резонансной компонент, при этом резонансные компоненты зависят от характеристик всех возбуждаемых в системе мод. Аналитические выражения для спектрального распределения амплитуд поля в требуемой области, генерируемого в результате освещения системы слоёв падающей на структуру волной с ненулевыми амплитудами, например H_{in}^- или H_{in}^+ , находятся в форме, сводимой к виду формулы Фано, из выражения (4). При этом коэффициенты полученного представления формулы Фано также описываются аналитическими выражениями как функциями от геометрических и оптических параметров структуры. На основе аналитических выражений коэффициентов формул Фано, в свою очередь, выделяются аналитические выражения для таких резонансных характеристик, как характерные ширина и высота резонансных кривых в спектрах, максимальное усиление поля.

АНАЛИЗ СЛУЧАЯ СТРУКТУР МЕТАЛЛ-ДИЭЛЕКТРИК-МЕТАЛЛ

Рассмотрим пятислойную структуру, включающую слои L_{l-1} , ..., L_{l+3} . Предположим, что слои L_{l-1} , L_{l+1} и L_{l+2} являются диэлектриками и характеризуются конечной толщиной d_l , причем слои L_{l-1} и L_{l+3} полубесконечны. Слои L_l и L_{l+2} являются металлическими. Например, значение действительной части показателя преломления слоя L_{l+1} меньше, чем это значение у слоя L_{l-1} . В такой конфигурации две плазмонные моды могут быть возбуждены вдоль границ раздела между слоями L_l и L_{l+1} и между слоями L_{l+1} и L_{l+2} плоской волной $h_{l-1,l}(x, z, \alpha) = H_{l-1,l} \exp\{ik_0[\alpha x + \beta_{l-1}(\alpha)z]\}$, падающей из слоя L_{l-1} на границу раздела между слоями L_{l-1} и L_l . Рассмотрим падение s- или p-поляризованной плоской волны, распространяющейся в слое L_{l-1} трехслойной структуры, на границу раздела между слоями L_{l-1} и L_l вдоль оси z в положительном направлении. Проекция постоянной распространения в слое L_j на оси x и z определяются как $k_0\alpha$ и $k_0\beta_j$ соответственно; $k_0 = 2\pi/\lambda$ – волновое число в свободном пространстве, λ – длина волны в свободном пространстве; α и $\beta_j = \sqrt{\epsilon_j - \alpha^2}$ – нормированные постоянные распространения вдоль осей x и z соответственно.

Согласно предлагаемому подходу, предположим, что соотношение между комплексными амплитудами плоских волн в слоях L_{l-1} и L_{l+3} определяется соотношением

$$\begin{bmatrix} H_{l,l-1} \\ H_{l-1,l} \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{T}}_{l,l+2} \begin{bmatrix} H_{l+3,l+2} \\ H_{l+2,l+3} \end{bmatrix}, \quad (5)$$

где

$$\bar{\mathbf{T}}_{l,l+2} = \mathbf{T}_{l-1,l-1,l}^0 \left(\prod_{i=l}^{l+2} \mathbf{T}_{i-1,i,i}^0 \mathbf{T}_{i,i,i}^d \mathbf{T}_{i,i,i+1}^0 \right) \mathbf{T}_{l+2,l+3,l+3}^0, \quad (6)$$

и используются следующие обозначения. Передаточная матрица $\mathbf{T}_{l,l,l+1}^0$ описывает амплитудные соотношения для системы из трёх слоёв, причём средний из этих трёх слоёв характеризуется нулевой толщиной и тем же показателем преломления, что и последний слой L_l . Разделительный слой расположен между слоями с показателями преломления, равными показателям преломления слоёв L_l и L_{l+1} . Матрицы передачи $\mathbf{T}_{l,l,l+1}^0$ и $\mathbf{T}_{l,l+1,l+1}^0$ задаются, соответственно, следующими выражениями, используя формализм метода передаточных матриц 2×2 (1):

$$\mathbf{T}_{l,l,l+1}^0 = \begin{bmatrix} t_{l+1,l} & r_{l,l+1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_{l,l+1,l+1}^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -r_{l+1,l}/t_{l,l+1} & 1/t_{l,l+1} \end{bmatrix}, \quad (7)$$

Передаточная матрица для волны, проходящей определенную толщину d_l внутри слоя L_l , определяется выражением

$$\mathbf{T}_{l,l,l}^d = \begin{bmatrix} v_l & 0 \\ 0 & 1/v_l \end{bmatrix}, \quad (8)$$

где $v_l = \exp(ik_0\beta_l d_l)$ – коэффициент изменения комплексной амплитуды поля плоской волны, распространившейся между границами разделительного слоя L_l на его толщину.

Поскольку матрицы $\bar{\mathbf{T}}_{l,l,l+1}^0$, $\bar{\mathbf{T}}_{l+1,l+1,l+2}^0$, $\bar{\mathbf{T}}_{l,l+1,l+1}^0$ и $\bar{\mathbf{T}}_{l+1,l+2,l+2}^0$ содержат резонансные коэффициенты, полная матрица $\bar{\mathbf{T}}_{l,l+2}$ может быть представлена как

$$\bar{\mathbf{T}}_{l,l+2} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} = \mathbf{A} \mathbf{R}' \mathbf{B} \mathbf{R}'' \mathbf{C}, \quad (9)$$

где коэффициенты матриц $\mathbf{A} = \mathbf{T}_{l-1,l-1,l}^0 \mathbf{T}_{i-1,i,i}^0 \mathbf{T}_{i,l,l}^d$, $\mathbf{B} = \mathbf{T}_{l+1,l+1,l+1}^d$ и $\mathbf{C} = \mathbf{T}_{l+1,l+1,l+1}^d \mathbf{T}_{l+2,l+2,l+3}^0 \mathbf{T}_{l+2,l+3,l+3}^0$ медленно меняются вблизи резонанса $\alpha \rightarrow \gamma_{l,l+1}^{\text{spp}}$ по отношению к резонансному поведению (2) и могут рассматриваться как константы. Резонансные матрицы $\mathbf{R}'$ и $\mathbf{R}''$ определяются как

$$\mathbf{R}' = \mathbf{T}_{l,l,l+1}^0 \mathbf{T}_{l,l+1,l+1}^0 = \frac{1}{1+r_{l,l+1}} \begin{bmatrix} 1 & r_{l,l+1} \\ r_{l,l+1} & 1 \end{bmatrix}, \quad (10)$$

$$\mathbf{R}'' = \mathbf{T}_{l+1,l+1,l+2}^0 \mathbf{T}_{l+1,l+2,l+2}^0 = \frac{1}{1+r_{l+1,l+2}} \begin{bmatrix} 1 & r_{l+1,l+2} \\ r_{l+1,l+2} & 1 \end{bmatrix}, \quad (11)$$

Коэффициенты матрицы $\bar{\mathbf{T}}_{l,l+2}$ можно получить как

$$T_{11} = v_{l+1}(A_{11}R'_{11} + A_{12}R'_{21})(C_{11}R''_{11} + C_{21}R''_{12}) + \frac{A_{11}R'_{12} + A_{12}R'_{22}}{v_{l+1}}(C_{11}R''_{21} + C_{21}R''_{22}), \quad (12)$$

$$T_{21} = v_{l+1}(A_{21}R'_{11} + A_{22}R'_{21})(C_{11}R''_{11} + C_{21}R''_{12}) + \frac{A_{21}R'_{12} + A_{22}R'_{22}}{v_{l+1}}(C_{11}R''_{21} + C_{21}R''_{22}), \quad (13)$$

$$T_{12} = v_{l+1}(A_{11}R'_{11} + A_{12}R'_{21})(C_{12}R''_{11} + C_{22}R''_{12}) + \frac{A_{11}R'_{12} + A_{12}R'_{22}}{v_{l+1}}(C_{12}R''_{21} + C_{22}R''_{22}), \quad (14)$$

$$T_{22} = v_{l+1}(A_{21}R'_{11} + A_{22}R'_{21})(C_{12}R''_{11} + C_{22}R''_{12}) + \frac{A_{21}R'_{12} + A_{22}R'_{22}}{v_{l+1}}(C_{12}R''_{21} + C_{22}R''_{22}), \quad (15)$$

где A_{ij} , R'_{ij} , R''_{ij} и C_{ij} – коэффициенты матриц $\mathbf{A}$, $\mathbf{R}'$, $\mathbf{R}''$ и $\mathbf{C}$, соответственно.

На основании выражения (3), предполагая, что с другой стороны системы слоев падающая волна отсутствует $H_{l+3,l+2} = 0$, амплитуду отраженной волны $H_{l,l-1} = T_{12} / T_{22}$ можно найти следующим образом:

$$H_{l,l-1} = \frac{v_{l+1}^2(A_{11} + A_{12}r_{l,l+1})(C_{12} + C_{22}r_{l+1,l+2}) + (A_{11}r_{l,l+1} + A_{12})(C_{12}r_{l+1,l+2} + C_{22})}{v_{l+1}^2(A_{21} + A_{22}r_{l,l+1})(C_{12} + C_{22}r_{l+1,l+2}) + (A_{21}r_{l,l+1} + A_{22})(C_{12}r_{l+1,l+2} + C_{22})} H_{l-1,l}, \quad (16)$$

Предположим, например, что оптические свойства слоёв L_l и L_{l+2} одинаковы. Обозначив $r = r_{l,l+1} = -r_{l+1,l+2}$ и подставив резонансную компоненту r в уравнение (16), получим соотношение для комплексной амплитуды отражённой волны:

$$H_{l,l-1} = \frac{v_{l+1}^2(A_{11} + A_{12}r)(C_{12} - C_{22}r) + (A_{11}r + A_{12})(-C_{12}r + C_{22})}{v_{l+1}^2(A_{21} + A_{22}r)(C_{12} - C_{22}r) + (A_{21}r + A_{22})(-C_{12}r + C_{22})} H_{l-1,l}, \quad (17)$$

Из резонансного соотношения (2) следует, что r можно представить в общем виде как

$$r = b + \frac{f}{\alpha - \gamma} = b \frac{\alpha - \gamma(1 - f/(b\gamma))}{\alpha - \gamma}, \quad (18)$$

где $r = r_{l,l+1}$, $f = \gamma_{l,l+1}^{\text{spp}} \kappa_{l,l+1}^{\text{spp}}$, $b = r_{l,l+1}^{\text{BG, spp}}$, $\gamma = \gamma_{l,l+1}^{\text{spp}}$. Подставляя уравнение (18) в соотношение (17), получаем:

$$H_{l,l-1} = \frac{U_1[(\alpha - \gamma)b + f]^2 - U_2(v_{l+1}^2 - 1)[(\alpha - \gamma)b + f](\alpha - \gamma) - U_3(\alpha - \gamma)^2}{I_1[(\alpha - \gamma)b + f]^2 - I_2(v_{l+1}^2 - 1)[(\alpha - \gamma)b + f](\alpha - \gamma) - I_3(\alpha - \gamma)^2} H_{l-1,l}, \quad (19)$$

где $U_1 = A_{11}C_{12} + A_{12}C_{22}v_{l+1}^2$, $U_2 = A_{12}C_{12} - A_{11}C_{22}$, $U_3 = A_{11}C_{12}v_{l+1}^2 + A_{12}C_{22}$, $I_1 = A_{22}C_{22}v_{l+1}^2 + A_{21}C_{12}$, $I_2 = A_{22}C_{12} - A_{21}C_{22}$ и $I_3 = A_{21}C_{12}v_{l+1}^2 + A_{22}C_{22}$ – комплексные коэффициенты. Для простоты рассмотрим случай нулевого фона, $b = 0$, что соответствует окрестности резонанса и $H_{l,l-1}$ представлено следующим соотношением:

$$H_{l,l-1} = \frac{U_3(\alpha - \gamma)^2 + U_2(v_{l+1}^2 - 1)(\alpha - \gamma)f - U_1f^2}{I_3(\alpha - \gamma)^2 + I_2(v_{l+1}^2 - 1)(\alpha - \gamma)f - I_1f^2} H_{l-1,l}, \quad (20)$$

Соотношение (20) далее сводится к следующему соотношению:

$$H_{l,l-1} = R_0 \frac{(\alpha - \gamma + \chi_1 \delta \frac{1 - v_{l+1}^2}{\theta_1} f)(\alpha - \gamma - \frac{1 - v_{l+1}^2}{\theta_1} f) - \left(v_{l+1} f \frac{\chi_1 + \delta}{\theta_1} \right)^2}{(\alpha - \gamma + \chi_2 \delta \frac{1 - v_{l+1}^2}{\theta_2} f)(\alpha - \gamma - \frac{1 - v_{l+1}^2}{\theta_2} f) - \left(v_{l+1} f \frac{\chi_2 + \delta}{\theta_2} \right)^2} H_{l-1,l}, \quad (21)$$

где

$$R_0 = \frac{A_{12}}{A_{22}} \frac{\theta_1}{\theta_2} \quad (22)$$

– нерезонансный коэффициент отражения от структуры, $\theta_1 = \delta + \chi_1 v_{l+1}^2$, $\theta_2 = \delta + \chi_2 v_{l+1}^2$, $\chi_1 = A_{11} / A_{12}$, $\chi_2 = A_{21} / A_{22}$, $\delta = C_{22} / C_{12}$ – комплексные коэффициенты. Согласно (21), форма линии спектра интенсивности волны, отраженной от структуры, приближенно описывается произведением двух формул Фано.

В случае сильной связи, $|1 - v_{l+1}^2| \ll |\theta_2 / f| |\alpha - \gamma|$, например, при достаточно малой толщине разделительного слоя, константы распространения двух возбуждаемых плазмонных мод характеризуются соотношениями с небольшим отличием

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \gamma + \frac{f}{\theta_2} \left[\frac{1}{2} (1 - v_{l+1}^2) (1 - \chi_2 \delta) + v_{l+1} (\chi_2 + \delta) \right], \\ \gamma_2 &= \gamma + \frac{f}{\theta_2} \left[\frac{1}{2} (1 - v_{l+1}^2) (1 - \chi_2 \delta) - v_{l+1} (\chi_2 + \delta) \right]. \end{aligned} \quad (23)$$

Если параметр связи слабый, $|(1 + \chi_2 \delta) / (\chi_2 + \delta)^2| \gg |v_{l+1}|$, например, когда толщина разделительного слоя велика, связанные собственные моды структуры можно получить из (21) как

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \gamma + \frac{f}{\theta_2} \left\{ 1 - \left[1 + \frac{(\chi_2 + \delta)^2}{(1 + \chi_2 \delta)} \right] v_{l+1}^2 \right\}, \\ \gamma_2 &= \gamma - \chi_2 \delta \frac{f}{\theta_2} \left\{ 1 - \left[1 + \frac{(\chi_2 + \delta)^2}{\chi_2 \delta (1 + \chi_2 \delta)} \right] v_{l+1}^2 \right\}. \end{aligned} \quad (24)$$

В случае несвязанных мод, например, когда толщина разделительного слоя бесконечна, $v_{l+1}^2 = 0$, вдоль границы раздела металлический слой/разделительный слой возбуждается только одна плазмонная мода с постоянной распространения $\bar{\gamma} = \gamma - \chi_2 f$, а амплитуда отраженной волны выражается из соотношения (21) с использованием соотношения (24) как

$$H_{l,l-1} = \frac{A_{12}}{A_{22}} \frac{\alpha - \gamma + \chi_1 f}{\alpha - \gamma + \chi_2 f} H_{l-1,l}, \quad (25)$$

Как и в двухмодовом случае, соотношение (25) позволяет аппроксимировать формы линий спектров интенсивности волн, отраженных от одномодовой структуры, одной формулой Фано. Соотношение (25) совпадает с результатами, полученными в [6].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе разработан метод аналитического приближенного описания интерференционного поля в резонансных многомодовых планарных структурах. Представленный в работе метод формирования композитных матриц в рамках формализма метода передаточных матриц 2×2 для определения аналитических зависимостей между резонансными характеристиками и параметрами плазмонных структур может быть распространен на моды других типов. Продемонстрирована возможность применения разработанного метода для аналитического анализа резонансных характеристик структур в виде соотношений типа Фано для интенсивностей вторичных волн в случае двухмодовой плазмонной структуры. Влияние геометрических и оптических параметров каждого слоя на резонансные характеристики может быть дополнительно извлечено из полюсов и нулей этих соотношений. Результаты настоящего исследования могут быть полезны для оптимизации конструкции и оптических характеристик многомодовых резонансных структур для приложений оптических вычислений, датчиков и спектроскопии.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Miroshnichenko, A.E. Fano resonances in nanoscale structures / A.E. Miroshnichenko, Y.S. Kivshar, S. Flach // Rev. Mod. Phys. – 2010. – Vol. 82, no. 3. – P. 2257-2298.

2. Optically resonant dielectric nanostructures / A. Kuznetsov, A. Miroschnichenko, M. Brongersma, Y. Kivshar, B. Lukyanchuk // *Science*. – 2016. – Vol. 354, no. 6314. – P. aag2472.
3. Progress in 2D photonic crystal Fano resonance photonics / W. Zhou, D. Zhao, Y.-C. Shuai, H. Yang, S. Chuwongin, A. Chadha, J.-H. Seo, K.X. Wang, V. Liu, Z. Ma, S. Fan // *Prog. Quantum Electron.* – 2014. – Vol. 38, no. 1. – P. 1-74.
4. Plasmonic computing of spatial differentiation / T.F. Zhu, Y.H. Zhou, Y.J. Lou, H. Ye, M. Qiu, Z.C. Ruan, S.H. Fan // *Nat. Commun.* – 2017. – Vol. 8. – P. 15391.
5. *Kazanskiy N.L.* (Ed.) *Photonics Elements for Sensing and Optical Conversions*. in 1 Online-Resource Vol. / N.L. Kazanskiy (Ed.). – BOCA RATON: CRC PRESS, 2023.
6. *Butt, M.A.* Insight into plasmonics: resurrection of modern-day science (invited) / M.A. Butt // *Comput. Opt.* – 2024. – Vol. 48, no. 1. – P. 5-17.
7. *Nesterenko, D.V.* Estimation of resonance characteristics of single-layer surface-plasmon sensors in liquid solutions using Fano's approximation in the visible and infrared regions / D.V. Nesterenko, R.A. Pavelkin, S. Hayashi // *Comput. Opt.* – 2019. – Vol. 43, no. 4. – P. 596-604.
8. *Frumin, L.L.* Accelerated algorithm for calculating spectra of aperiodic gratings / L.L. Frumin, A.E. Chernyavsky // *Comput. Opt.* – 2025. – Vol. 49, no. 4. – P. 573-578.
9. *Panin, D.N.* Inhomogeneous chiral metamaterials: optical wave reflection analysis with regard to the dispersion of material parameters / D.N. Panin, O.V. Osipov // *Comput. Opt.* – 2024. – Vol. 48, no. 6. – P. 809-815.
10. *Yeh, P.* Electromagnetic propagation in periodic stratified media I General theory / P. Yeh, A. Yariv, C.-S. Hong // *J. Opt. Soc. Am.* – 1977. – Vol. 67, no. 4. – P. 423-38.
11. *Hoenders, B.J.* Coherence theory of electromagnetic wave propagation through stratified N-layer media / B.J. Hoenders, M. Bertolotti // *J. Opt. Soc. Am. A.* – 2005. – Vol. 22, no. 6. – P. 1143-1150.
12. *Markos P., Soukoulis C.M.* *Wave Propagation From Electrons to Photonic Crystals and Left-Handed Materials*. Princeton University Press, 2008.
13. *Chekhonina, S.V.* Research plasmon polaritons resonances with use method of transfers-matrixes / S.V. Chekhonina // *Izvestiya Samarskogo nauchnogo centra Rossijskoj akademii nauk*. – 2012. – Vol. 14, no. 4. – P. 232-235.
14. Haus H.A. *Waves and fields in optoelectronics*. – Englewood Cliffs; London: Prentice-Hall, 1984.
15. *Nesterenko, D.V.* Ab initio spatial coupled-mode theory of Fano resonances in optical responses of multilayer interference resonators / D.V. Nesterenko, S. Hayashi, V. Soifer // *Physical Review A*. – 2022. – Vol. 106, no. 2. – P. 023507.
16. *Fano, U.* Effects of Configuration Interaction on Intensities and Phase Shifts / U. Fano // *Phys. Rev.* – 1961. – Vol. 124, no. 6. – P. 1866-1878.
17. *Gallinet, B.* Ab initio theory of Fano resonances in plasmonic nanostructures and metamaterials / B. Gallinet, O.J.F. Martin // *Phys. Rev. B*. – 2011. – Vol. 83, no. 23. – P. 235427.
18. Gallinet B. *Model of Coupled Oscillators for Fano Resonances* / B. Gallinet // *Fano Resonances in Optics and Microwaves*. – New York: Springer Book, 2018. – P. 109-136.
19. Villa, F. Electromagnetic modes in metal-insulator-metal structures / F. Villa, T. Lopez-Rios, L.E. Regalado // *Phys. Rev. B*. – 2001. – Vol. 63, no. 16.
20. *Nesterenko, D.V.* Asymmetric surface plasmon resonances revisited as Fano resonances / D.V. Nesterenko, S. Hayashi, Z. Sekkat // *Phys. Rev. B*. – 2018. – Vol. 97. – P. 235437.
21. *Nesterenko, D.V.* Resonance characteristics of transmissive optical filters based on metal/dielectric/metal structures / D.V. Nesterenko // *Comput. Opt.* – 2020. – Vol. 44, no. 2. – P. 219-228.

METHOD OF MODELING OF ASYMMETRIC RESONANCES IN SPECTRA OF MULTIMODE PLANAR STRUCTURES BASED ON TRANSFER MATRIX METHOD

© 2025 D.V. Nesterenko

Samara National Research University named after academician S.P. Korolyov, Samara, Россия

Multimode plasmonic layered structures, whose elements support the excitation and coupling of particular plasmonic modes, exhibit asymmetric resonances in angular spectra of transmission or reflection. Conventional transfer matrix method is used to describe the field amplitudes for fixed spectral parameters in such planar layer systems; however, this approach does not reveal the nature of the arising resonances. In the present work, a new mathematical method based on the transfer matrix method has been developed. This method is capable of the derivation of analytical expressions in the form of Fano-like formulas that approximate asymmetric resonances in the spectra as a result of interference between resonance and non-resonance components. Using the developed method analytical expressions for Fano parameters were obtained.

Keywords: mathematical method, surface plasmons, planar structures, approximation, resonance characteristics.

DOI: 10.37313/1990-5378-2025-27-6-207-213

EDN: NKRBNQ