

ВКЛЮЧЕНИЕ В ПЛОСКОМ УПРУГОМ КЛИНЕ СО СВОБОДНЫМИ ГРАНЯМИ

© 2026 Б.В. Соболев, Д.А. Пожарский, Е.Д. Пожарская

Донской государственный технический университет, г. Ростов-на-Дону, Россия

Статья поступила в редакцию 28.01.2026

В плоской постановке с использованием полярных координат рассматривается контактная задача для линейно-упругого клина, на биссектрисе которого расположено тонкое жесткое включение конечной длины. Внешние грани клина свободны от напряжений. Задача симметрична по угловой координате. Включение полностью сцеплено с упругой средой в области контакта. К включению приложена касательная сила, под действием которой оно смещается вдоль радиальной координаты на заданную величину. При помощи метода интегрального преобразования Меллина задача сводится к интегральному уравнению относительно касательных контактных напряжений. Функция-символ ядра интегрального уравнения по своему поведению в нуле и бесконечности имеет тип котангенса гиперболического. В отличие от ранее рассмотренных случаев жесткой или скользящей заделки граней клина, где символ ядра типа тангенса гиперболического, здесь невозможно найти связь между приложенной силой и смещением включения. Если включение не выходит на вершину клина, вводится безразмерный параметр, характеризующий относительную удаленность включения от вершины, и для решения применяются три метода. Первый метод состоит в получении замкнутого решения, основанного на специальной аппроксимации символа ядра. Второй метод, регулярный асимптотический, включает разложение решения по степеням малого параметра и эффективен для включений, относительно удаленных от вершины клина. Третий метод, сингулярный асимптотический, связан с суперпозицией вырожденного решения и решений типа погранслоя, получаемых на основе решений интегральных уравнений Винера-Хопфа. Этот метод эффективен для включений, относительно близких к вершине клина. Если включение выходит из вершины клина, приводится замкнутое решение задачи, основанное на решении возникающего интегрального уравнения Винера-Хопфа. Во всех случаях искомые контактные напряжения выражаются через силу, приложенную к включению. Проводится численный анализ для различных значений угла клина, коэффициента Пуассона и безразмерного параметра.

Ключевые слова: упругий клин, жесткое включение, плоская задача, интегральное уравнение, асимптотические методы.

DOI: 10.37313/1990-5378-2026-28-2-196-202

EDN: HNWOMP

*Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда
№ 24-21-00014, <https://rscf.ru/project/24-21-00014/>*

1. ВВЕДЕНИЕ

Исследования задач о включениях могут иметь применения при моделировании композитов, строительных конструкций с элементами жесткости, имплантов в тканях. Ранее было найдено точное решение контактной задачи о тонком эллиптическом включении в упругом пространстве [1]. Изучались плоские задачи о тонком жестком [1] или упругом [2] включении в полосе. Анализировались периодические системы включений в упругой плоскости [3]. Изучались задачи о включениях в нелинейной постановке, содержащей краевые условия в виде неравенств [4-6], проводилась оптимизация параметров [7]. Изучались плоские [8] и пространственные [9] задачи о включениях в клине, грани которого находятся в условиях жесткой или скользящей заделки. В настоящей статье, по-видимому, впервые рассматривается случай, когда грани клина свободны от напряжений. Показано, что в плоской задаче в отличие от ранее рассмотренных задач [8] не удается определить связь между силой, приложенной к включению, и его смещением, что связано с изменением поведения в нуле функции-символа ядра интегрального уравнения. Аналогичный эффект наблюдается в плоских задачах о вдавливании штампа в грань клина [10]. Альтернативным методом является метод конечных элементов [11].

Соболев Борис Владимирович, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой информационных технологий. E-mail: b.sobol@mail.ru

Пожарский Дмитрий Александрович, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры высшей математики. E-mail: pozharda@rambler.ru

Пожарская Елизавета Дмитриевна, кандидат физико-математических наук ассистент кафедры информационных технологий. E-mail: pozharskaya.elizaveta@rambler.ru

2. ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ И МЕТОД СПЕЦИАЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИИ

В полярных координатах r, j рассмотрим плоский упругий клин $\{r \in [0, \infty); j \in [-\alpha, \alpha]\}$ с тонким жестким включением $a \leq r \leq b$ на биссектрисе $\varphi=0$ (рис. 1). Между включением и упругой средой осуществляется полное сцепление в области контакта. К включению приложена касательная сила интенсивности $2T$, направленная вдоль оси r . Под действием силы включение сдвигается на величину δ . Внешние грани клина свободны от напряжений (плоская задача А, полосовое включение в трехмерном клине). Материал клина имеет параметры упругости G (модуль сдвига) и ν (коэффициент Пуассона). В силу симметрии достаточно рассматривать область $0 \leq j \leq \alpha$, граничные условия в которой имеют вид

$$\varphi = 0 : u_\varphi = 0; u_r = \delta (r \in (a; b)); \tau_{r\varphi} = 0 (r \notin (a; b)); \quad (1)$$

$$\varphi = \alpha : \sigma_\varphi = \tau_{r\varphi} = 0. \quad (2)$$

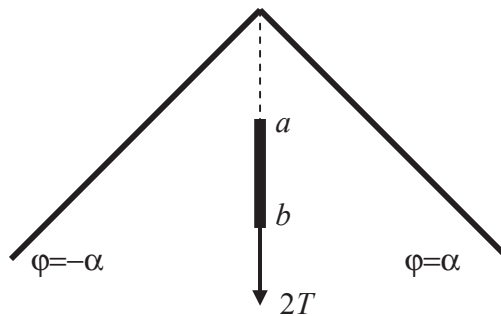


Рис. 1. Схема контакта включения и клина

Используя интегральное преобразование Меллина и теорию вычетов [10,12], для неизвестного касательного напряжения в области контакта $t_{rj} = t(r)$, $a \leq r \leq b$, $j=0$ получим интегральное уравнение ($\theta = G4(1-\nu)\kappa^{-1}$, $\kappa = 3-4\nu$)

$$\int_a^b \tau(\rho) k \left(\ln \frac{\rho}{r} \right) d\rho = \pi \theta \delta \quad (a \leq r \leq b), \quad (3)$$

$$k(t) = \int_0^\infty \frac{L(u)}{u} \cos(ut) du + \frac{\pi}{2} Bt, \quad (4)$$

$$L(u) = \frac{2\kappa \operatorname{ch}(2\alpha u) + 4u^2 \sin^2 \alpha + \kappa^2 + 1}{2\kappa \operatorname{sh}(2\alpha u) + 2\kappa u \sin(2\alpha)}, \quad (5)$$

$$B = \lim_{u \rightarrow 0} uL(u) = \frac{(\kappa+1)^2}{4\kappa\alpha + 2\kappa \sin(2\alpha)}. \quad (6)$$

Асимптотика функции-символа (5) в нуле и бесконечности имеет вид:

$$L(u) = B/u + O(u) \quad (u \rightarrow 0), \quad (7)$$

$$L(u) = 1 + O(u^2 \exp(-2\alpha u)) \quad (u \rightarrow \infty). \quad (8)$$

Поскольку функция-символ $L(u)$ ведет себя в нуле и бесконечности как $\operatorname{cth}(u/B)$, невозможно определить связь между силой T и смещением d (это связано с плоской постановкой задачи [10]). Контактное напряжение требуется выразить через силу T при помощи условия равновесия включения

$$\int_a^b \tau(r) dr = T. \quad (9)$$

Введем безразмерные обозначения

$$x = \lambda \ln(r/a) - 1, \quad \xi = \lambda \ln(\rho/a) - 1, \quad \lambda = 2/\ln(b/a), \quad (10)$$

$$g = \lambda \delta / a, \quad \varphi(\xi) = \rho \tau(\rho) / (a\theta), \quad T_* = T / (a\theta). \quad (11)$$

Параметр l характеризует относительную удаленность включения от вершины клина. В обозначениях (10), (11) уравнение (3) принимает вид

$$\int_{-1}^1 \varphi(\xi) k \left(\frac{\xi - x}{\lambda} \right) d\xi = \pi g \quad (|x| \leq 1). \quad (12)$$

Для получения приближенного решения уравнения (12) при учете свойств (7), (8) используем метод специальной аппроксимации [10]

$$L(u) \approx \text{cth}(u/B) \quad (-\infty < u < \infty). \quad (13)$$

После почленного дифференцирования уравнения (12) по x , взятия интеграла

$$\int_0^{\infty} \text{cth}(u/B) \sin(ut) du = \frac{\pi B}{2} \text{cth} \frac{\pi B t}{2} \quad (14)$$

в ядре (12) приходим к известному интегральному уравнению, имеющему точное решение [10]

$$\varphi(x) = \frac{T_* B \exp(\pi B x / (2\lambda))}{\sqrt{2[\text{ch}(\pi B / \lambda) - \text{ch}(\pi B x / \lambda)]}}, \quad (15)$$

$$T_* = \frac{1}{\lambda} \int_{-1}^1 \varphi(x) dx, \quad (16)$$

Решение (15) является точным при $\alpha = \pi$, $\nu = 0.5$, $L(u) = \text{cth}(\pi u)$ (включение в несжимаемой плоскости с лучевым разрезом, границы которого свободны от напряжений). Относительная погрешность решения (15) не превосходит относительной погрешности ε аппроксимации (13). Значение ε чувствительно к коэффициенту Пуассона (рис. 2).

При $\nu = 0.1$ и $\alpha \in (0, \pi]$ погрешность $\varepsilon < 9\%$. В связи с тем, что погрешность аппроксимации (13) приемлема не при всех значениях α и ν , требуется привлечение других методов.

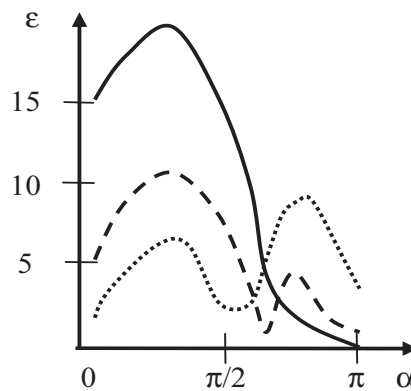


Рис. 2. Погрешность $\varepsilon(\alpha)$ (%) при $\nu = 0,5$ (сплошная линия), $\nu = 0,3$ (пунктир) и $\nu = 0,1$ (точки)

3. РЕГУЛЯРНЫЙ АСИМПТОТИЧЕСКИЙ МЕТОД

Для относительно удаленных от вершины клина включений (при достаточно больших l) применим метод разложения решения в ряд по степеням малого параметра l^{-1} [10]. Метод основан на выделении регулярной части ядра продифференцированного уравнения (12) и разложении ее в ряд по степеням l^{-1} , который сходится при $\lambda > \alpha^{-1}$, что определяет границы применимости метода. В результате получим ($\lambda \rightarrow \infty$)

$$\begin{aligned} \varphi(x) = & \frac{T_*}{\pi \sqrt{1-x^2}} \left[\lambda + \frac{a_0(1-2x^2)}{2\lambda} + \frac{a_1(7-8x^2-8x^4)}{8\lambda^3} + \right. \\ & \left. + \frac{\pi B x}{2} \left(1 + \frac{a_0}{2\lambda^2} + \frac{a_0^2}{4\lambda^4} - \frac{3a_1}{8\lambda^4} (1-4x^2) \right) + O\left(\frac{1}{\lambda^5}\right) \right], \end{aligned} \quad (17)$$

$$a_0 = \int_0^{\infty} [1 - L(u)] u du, \quad a_1 = \frac{-1}{6} \int_0^{\infty} [1 - L(u)] u^3 du. \quad (18)$$

Значения α_0 и α_1 даны в табл. 1.

Как показывают расчеты, погрешность асимптотического решения (17) при $\lambda \geq 2\alpha^{-1}$ не превышает 5%. Величина $\varphi_0 = \varphi(0)/T_*$ по решениям (15) и (17) находится соответственно по формулам

$$\varphi_0 = \frac{B}{2\text{sh}(\pi B / (2\lambda))}, \quad \varphi_0 = \frac{1}{\pi} \left(\lambda + \frac{a_0}{2\lambda} + \frac{7a_1}{8\lambda^3} + O\left(\frac{1}{\lambda^5}\right) \right). \quad (19)$$

При $\lambda \rightarrow \infty$ обе формулы (19) дают в пределе $\lim \varphi_0 = \lambda / \pi$.

Таблица 1. Значения постоянных (18)

α	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$
ν	0,5			0,3			0,1		
$-a_0 10^3$	1796	583	246	1152	517	258	1080	553	294
$a_1 10^3$	2064	106	12,0	992	72,2	11,1	651	64,5	11,9

4. СИНГУЛЯРНЫЙ АСИМПТОТИЧЕСКИЙ МЕТОД

Для относительно близких к вершине клина включений (при достаточно малых l) используем сингулярный асимптотический метод, основанный на решении интегральных уравнений Винера-Хопфа [13] и аппроксимации функции-символа ядра на действительной оси легко факторизуемым выражением

$$L(u) \approx \frac{(u^2 + C^2)(u^2 + E^2)}{u\sqrt{u^2 + D^2}(u^2 + F^2)}, \quad C = \frac{\sqrt{BDF}}{E}. \tag{20}$$

В результате получим $(\text{erf}(x))$ — интеграл вероятности

$$\varphi(x) = \sqrt{BP}\omega\left(\frac{1+x}{\lambda}\right) + \omega\left(\frac{1-x}{\lambda}\right), \tag{21}$$

$$P = P_1 f(C) + P_2 f(E), \tag{22}$$

$$\omega(t) = \frac{T_*}{S} \left[\frac{\exp(-Dt)}{\sqrt{\pi t}} + P_1 \sqrt{D-C} \exp(-Ct) \text{erf} \sqrt{(D-C)t} + P_2 \sqrt{D-E} \exp(-Et) \text{erf} \sqrt{(D-E)t} \right], \tag{23}$$

$$S = (\sqrt{BP} + 1) [P_1 g(C) + P_2 g(E)], \tag{24}$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{D}}{x} \left(1 - \text{erf} \sqrt{\frac{2D}{\lambda}} \right) + \frac{\sqrt{D-x}}{x} \exp\left(-\frac{2x}{\lambda}\right) \text{erf} \sqrt{\frac{2(D-x)}{\lambda}}, \tag{25}$$

$$g(x) = \frac{\sqrt{D}}{x} - f(x), \quad P_1 = \frac{C-F}{C-E}, \quad P_2 = \frac{F-E}{C-E}. \tag{26}$$

Параметры аппроксимации D, E и F и ее относительная погрешность ε_0 даны в табл. 2.

Таблица 2. Параметры аппроксимации (20) и погрешность ε_0 (%)

α	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$
ν	0,5			0,3			0,1		
D	0,275	2,93	1,16	0,455	1,79	1,10	1,72	1,64	0,367
E	2,08	2,05	0,790	1,76	1,30	0,670	1,29	1,14	0,910
F	1,80	0,900	0,600	1,70	0,700	0,500	0,400	0,400	1,10
ε_0	3,5	1,5	1	1,5	1	1	1	1	1,5

Результаты расчетов характеристики контактного напряжения φ_0 тремя методами приведены в табл. 3. Как видно, при определенных значениях параметра l наблюдается смыкание асимптотических решений.

Таблица 3. Характеристика контактного напряжения φ_0 при $n=0,3$

λ	0,5	1	2	0,5	1	2
α	$\pi/2$			$2\pi/3$		
Решение (15)	0,0796	0,263	0,606	0,0850	0,268	0,609
Решение (17)	—	0,256	0,598	—	0,270	0,610
Решение (21)	0,0801	0,258	—	0,0863	0,274	—

На рис. 3 показаны зависимости контактной характеристики $\varphi_0 = \varphi(0)/T_*$ от угла α и параметра λ , рассчитанные по замкнутому решению (первая формула (19)). Напряжение φ_0 растет при увеличении α и λ , что связано с отдалением свободных граней клина от области включения. На рис. 4 показана зависимость контактной характеристики

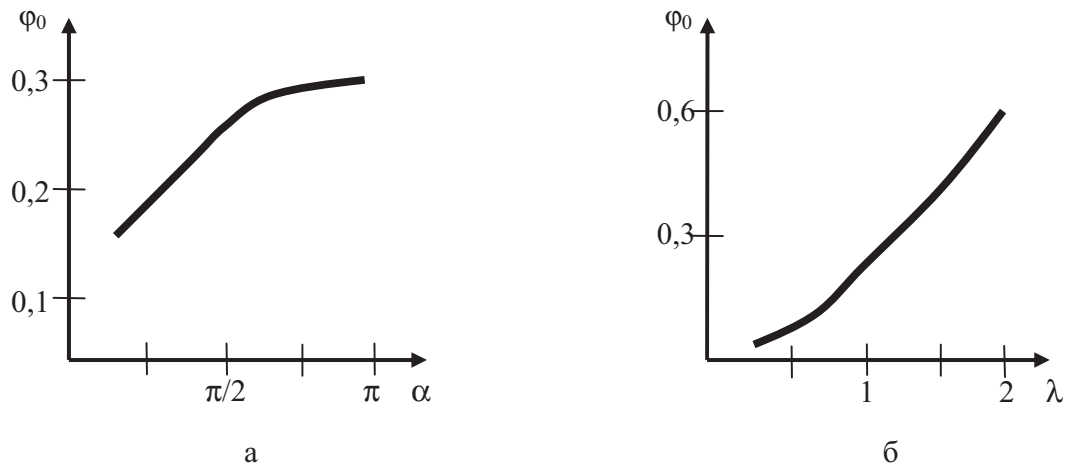


Рис. 3. Графики зависимостей $\varphi_0(\alpha)$ при $\lambda=1$ (а) и $\varphi_0(\lambda)$ при $\alpha=\pi/2$ (б); $\nu=0,1$

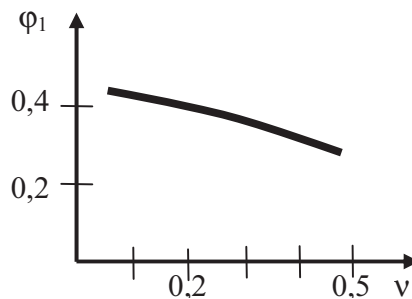


Рис. 4. График зависимости $\varphi_1(\nu)$ при $\alpha=\pi/2, \lambda=2$

$$\varphi_1 = \varphi_0 \kappa / (4 - 4\nu) = \varphi(0) / T_0, \quad T_0 = T / (aG) \quad (27)$$

от коэффициента Пуассона ν (здесь T — размерная сила), рассчитанная по второй формуле (19). С ростом ν отнесенное к силе напряжение снижается.

5. СЛУЧАЙ ВЫХОДА ВКЛЮЧЕНИЯ НА УГОЛ КЛИНА

При выходе включения на вершину клина ($a=0$) контактная задача имеет замкнутое решение. Продифференцируем обе части интегрального уравнения (3) по r и введем обозначения

$$\eta = \ln(b/r), \quad t = \ln(b/\rho), \quad \varphi(t) = \rho \tau(\rho) / (b\theta). \quad (28)$$

Тогда уравнение (3) становится уравнением типа Винера-Хопфа [13]

$$\int_0^{\infty} \varphi(t) l(\eta - t) dt = 0 \quad (0 \leq \eta < \infty), \quad (29)$$

$$l(t) = \int_0^{\infty} L(u) \sin(ut) du - \frac{\pi}{2} B. \quad (30)$$

Решение уравнения (29) основано на факторизации мероморфной функции $L(z) = L_+(z)L_-(z)$, где $L_+(z)$ регулярна при $\text{Im } z > z_-$, а $L_-(z)$ — при $\text{Im } z < z_+$. В результате получим

$$\varphi(t) = A_0 \int_{-\infty+ic}^{+\infty+ic} \frac{\exp(-i\eta t) d\eta}{L_+(\eta)}, \quad (31)$$

где произвольная постоянная A_0 должна быть выражена через силу T при помощи условия равновесия (9) Из (31) ясно, что поведение $t(r) \sim r^{\delta_1 - 1}$ при $r \rightarrow 0$ определяется нулем $-i\delta_1$ функции $L_+(z)$, в котором число δ_1 имеет наименьшую положительную действительную часть. Первые комплексные нули числителя $L(z)$ (5) табулированы для некоторых α и ν ([12], табл. 18). В табл.

4 даны показатели особенности $t(r) \sim r^\gamma$ при $r \rightarrow 0$, когда $\nu=0,25$. Как видно, при увеличении угла клина возникают осцилляции контактных напряжений. Показатель γ существенно зависит от коэффициента Пуассона. Например, при $\alpha=\pi$, $\nu=0,5$ имеем $\gamma=-0,5$ (классическая корневая особенность без осцилляций), тогда как при $\alpha=\pi$, $\nu=0,25$ возникают осцилляции (см. табл. 4).

Таблица 4. Показатель особенности γ ($\nu=0,25$)

α	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π
γ	0,282	-0,255	-0,302+i0,0416	-0,500+i0,110

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Задача о жестком включении в клине с учетом смешанных граничных условий сведена к интегральному уравнению, которое типично для плоских контактных задач. Показана близость решений плоской контактной задачи о включении в упругом клине, получаемых по методу специальной аппроксимации символа ядра интегрального уравнения и по асимптотическим методам «больших» и «малых» l . При необходимости можно увеличить точность аппроксимации (20), вводя добавочные сомножители на основе аппроксимаций типа Паде. Установлены особенности контактных напряжений в кончике включения, достигающего угловой точки клина. Показана возможность осцилляций контактных напряжений в вершине клина.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров, В.М. Тонкие концентраторы напряжений в упругих телах / В.М. Александров, Б.И. Сметанин, Б.В. Соболев. – М.: Наука, 1993. – 224 с.
2. Грилицкий, Д.В. Распределение напряжений в полосе с упругим тонким включением / Д.В. Грилицкий, А.А. Евтушенко, Г.Т. Сулим // Прикладная математика и механика. – 1979. – Т. 43. – Вып. 3. – С. 542-549.
3. Александров, В.М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками / В.М. Александров, С.М. Мхитарян. – М.: Наука, 1983. – 488 с.
4. Попова, Т.С. Задача о Т-образном сопряжении двух тонких включений Тимошенко в упругом теле / Т.С. Попова // Математические заметки СВФУ. – 2023. – Т. 30. – № 2. – С. 40-55.
5. Khludnev, A.M. Elastic body with thin nonhomogeneous inclusion in non-coercive case / A.M. Khludnev, A.A. Rodionov // Math. Mech. Solids. – 2023. – Vol. 28. – No. 10. – P. 2141-2154.
6. Khludnev, A.M. Noncoercive problems for elastic bodies with thin elastic inclusions / A.M. Khludnev, I.V. Fankina // Math. Meth. Appl. Sci. – 2023. – Vol. 46. – No. 13. – P. 14214-14228.
7. Khludnev, A.M. Optimal control of parameters for elastic body with thin inclusions / A.M. Khludnev, A. Corbo Esposito, L. Faella // J. Opt. Theory Appl. – 2020. – V. 184. – No. 1. – P. 293-314.
8. Пожарский, Д.А. Контактные задачи о включении в плоском упругом клине / Д.А. Пожарский, Е.Д. Пожарская, Б.В. Соболев // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2024. – № 4. – С. 36-43.
9. Пожарская, Е.Д. Системы включений в пространственном упругом клине / Е.Д. Пожарская, Д.А. Пожарский, Б.В. Соболев // Прикладная математика и механика. – 2024. – Т. 88. – № 3. – С. 494-504.
10. Александров, В.М. Контактные задачи в машиностроении / В.М. Александров, Б.Л. Ромалис. – М.: Машиностроение, 1986. – 176 с.
11. Гайджуров, П.П. Применение метода двойной аппроксимации для построения матриц жесткости объемных конечных элементов / П.П. Гайджуров, Н.А. Савельева // Advanced Engineering Research. – 2023. – Т. 23. – № 4. – С. 365-375.
12. Уфлянд, Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости / Я.С. Уфлянд. – М.: Изд-во АН СССР, 1963. – 367 с.
13. Нобл, Б. Метод Винера-Хопфа / Б. Нобл. – М., Л.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 276 с.

INCLUSION IN A PLANE ELASTIC WEDGE WITH FREE FACES

© 2026 B.V. Sobol, D.A. Pozharskii, E.D. Pozharskaya

Don State Technical University, Rostov-on-Don, Russia

In a plane formulation using polar coordinates, the contact problem for a linear-elastic wedge is considered, on the bisector of which a thin rigid inclusion of finite length is located. External faces of wedge are stress-free. The problem is symmetrical with respect to angular coordinate. The inclusion is fully cohesive with the elastic medium in the contact area. A tangential force is applied to the inclusion, under the action of which it shifts along the radial coordinate by a specified amount. Using the Mellin integral transformation method, the problem is reduced to an integral equation with respect to tangential contact stresses. The kernel symbol function of the integral equation in its behavior at zero and infinity has the type of cotangent hyperbolic. Unlike previously considered cases of rigid or sliding support of wedge faces, where the kernel symbol is of the hyperbolic tangent type, it is impossible to find a connection between the applied force and the inclusion displacement. If the inclusion does not extend to the apex of the wedge, introduce a dimensionless parameter characterizing the relative distance of the inclusion from the apex, and three methods are used to solve it. The first method is to obtain a closed solution based on a special approximation of the kernel symbol. The second method, regular asymptotic, involves decomposing the solution by degrees of a small parameter and is effective for inclusions relatively distant from the apex of the wedge. The third method, singular asymptotic, is related to the superposition of a degenerate solution and solutions of the boundary layer type, obtained on the basis of solutions of the Wiener-Hopf integral equations. This method is effective for inclusions relatively close to the top of the wedge. If the inclusion comes out of the vertex of the wedge, a closed solution to the problem is given, based on the solution of the Wiener-Hopf integral equation. In all cases, the desired contact stresses are expressed in terms of the force applied to the inclusion. Numerical analysis is performed for various values of wedge angle, Poisson's ratio and dimensionless parameter.

Key words: elastic wedge, rigid inclusion, plane problem, integral equation, asymptotic methods.

DOI: 10.37313/1990-5378-2026-28-2-196-202

EDN: HMWOMP

REFERENCES

1. *Aleksandrov, V.M.* Tonkie kontsentratory napryazhenii v uprugikh telakh / V.M. Aleksandrov, B.I. Smetanin, B.V. Sobol. – M.: Nauka, 1993. – 224 s.
2. *Grilitskii, D.V.* Raspreделение napryazhenii v polose s uprugim tonkim vklyucheniem / D.V. Grilitskii, A.A. Evtushenko, G.T. Sulim // *Prikladnaya matematika i mekhanika.* – 1979. – T. 43. – Vyp. 3. – S. 542-549.
3. *Aleksandrov, V.M.* Kontaktnye zadachi dlya tel s tonkimi pokrytiyami i prosloikami / V.M. Aleksandrov, S.M. Mkhitaryan. – M.: Nauka, 1983. – 488 s.
4. *Popova, T.S.* Zadacha o T-obraznom sopryazhenii dvukh tonkikh vklyuchenii Timoshenko v uprugom tele / T.S. Popova // *Matemeticheskie zametki SVFU.* – 2023. – T. 30. – No. 2. – S. 40-55.
5. *Khludnev, A.M.* Elastic body with thin nonhomogeneous inclusion in non-coercive case / A.M. Khludnev, A.A. Rodionov // *Math. Mech. Solids.* – 2023. – Vol. 28. – No. 10. – P. 2141-2154.
6. *Khludnev, A.M.* Noncoercive problems for elastic bodies with thin elastic inclusions / A.M. Khludnev, I.V. Fankina // *Math. Meth. Appl. Sci.* – 2023. – Vol. 46. – No. 13. – P. 14214-14228.
7. *Khludnev, A.M.* Optimal control of parameters for elastic body with thin inclusions / A.M. Khludnev, A. Corbo Esposito, L. Faella // *J. Opt. Theory Appl.* – 2020. – V. 184. – No. 1. – P. 293-314.
8. *Pozharskii, D.A.* Kontaktnye zadachi o vklyuchenii v ploskom uprugom kline / D.A. Pozharskii, E.D. Pozharskaya, B.V. Sobol // *Vestnik Permskogo natsionalnogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Mekhanika.* 2024. – No. 4. – S. 36-43.
9. *Pozharskaya, E.D.* Sistemy vklyuchenii v prostranstvennom uprugom kline / E.D. Pozharskaya, D.A. Pozharskii, B.V. Sobol // *Prikladnaya matematika i mekhanika.* – 2024. – T. 88. – No. 3. – S. 494-504.
10. *Aleksandrov, V.M.* Kontaktnye zadachi v mashinostroenii / V.M. Aleksandrov, B.L. Romalis. – M.: Mashinostroenie, 1986. – 176 s.
11. *Gaidzhurov, P.P.* Primenenie metoda dvoynoi approksimatsii dlya postroeniya matrits zhestkosti ob'emnykh konechnykh elementov / P.P. Gaidzhurov, N.A. Savel'eva // *Advanced Engineering Research.* – 2023. – Vol. 23. – No. 4. – S. 365-375.
12. *Uflyand, Ya.S.* Integralnye preobrazovaniya v zadachakh teorii uprugosti / Ya.S. Uflyand. – M.: Izd-vo AN SSSR, 1963. – 367 s.
13. *Nobl, B.* Metod Vinera-Hopfa / B. Nobl. – M., L.: Izd-vo inostr. lit., 1962. – 276 s.

Boris Sobol, Doctor of Technics, Professor, Head of Department of Informational Technologies. E-mail: b.sobol@mail.ru
Dmitrii Pozharskii, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Department of Higher Mathematics.

E-mail: pozharda@rambler.ru

Elizaveta Pozharskaya, Candidate of Physics and Mathematics Assistant, Department of Informational Technologies.

E-mail: pozharskaya.elizaveta@rambler.ru