УДК 51-72

ВЛИЯНИЕ ДРОБНОЙ РАЗМЕРНОСТИ МОДЕЛИ ШЕРОХОВАТОЙ ПОВЕРХНОСТИ НА ТРИБОЛОГИЧЕСКИЕ ИСПЫТАНИЯ

© 2026 Е.Н. Сосенушкин, Е.А. Яновская, А.С. Желнов

Московский государственный технологический университет «СТАНКИН», г. Москва, Россия

Статья поступила в редакцию 16.04.2026

При компьютерном моделировании поверхностей с дробной размерностью для прогнозирования износа важным является вопрос соответствия такой размерности реальным физическим величинам. Опираясь на построенные модели и геометрию для валидации, полученных результатов [1, 2], требуется подтверждение с помощью натурного эксперимента. В работе рассматривается методологический подход к связному переходу от дробно-размерного описания микрорельефа поверхности к реальным физико-механическим параметрам трения и износа, что позволяет сопоставить модель с трибологическим экспериментом. Аналитическое преобразование осуществить в несколько этапов, в начале задается диапазон размерности. Далее моделируется реальная площадь контакта от заданной размерности с учетом влияния площади контакта на величину износа поверхности. Площадь контакта рассматривается, как функция построения модели трения. Износ рассчитывается по формуле Арчарда, связывающей дробную размерность, твердость и коэффициент трения. В результате проведено численное моделирование для перехода к реальным параметрам, моделирование износа, расчеты для различных материалов. Определено влияние основных параметров на величину объема износа по методу SHAP и Partial dependence. Выделены основные области отличия размерности и рассмотрено влияние этой размерности на износ в рассматриваемых областях. Проведены расчёты для конкретно-заданного материала по нахождению области минимального износа, что может быть использовано в дальнейшем при проведении натурного трибологического эксперимента на износ.

Ключевые слова: математическое и компьютерное моделирование; численное моделирование; износ; трибология.

DOI: 10.37313/1990-5378-2026-28-4-161-168
EDN: IEMBQJ

Работа поддержана Минобрнауки РФ
(госзадание, проект № FSFS- 2024-0007)

ПЕРЕХОД К РАЗМЕРНЫМ ФИЗИЧЕСКИМ ПАРАМЕТРАМ И ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ИЗНОСА

В работах [3-4] была получена аналитическая модель нормированной скорости изнашивания Q^* , основанная на дробно-размерном представлении поверхностей контакта. Однако для применения модели в инженерной практике необходимо выполнить переход от безразмерных выражений к реальным физическим параметрам — объёму износа при заданных нагрузках, твёрдости материалов и условиях трения. Рассмотрим полный численный алгоритм и результаты параметрического анализа, демонстрирующие влияние дробной размерности D и нормированной площади истинного контакта A_r^* на реальный объём износа.

Перепишем полученную ранее аналитическую модель в явном виде:

$$Q^* = \left[k_e - \left(k_e - k_p\right)\frac{D\,G^{*2}}{A_r^*(2-D)}\varphi^{\frac{2}{D-1}}\right] A_r^*\sqrt{1+3\mu^2}, \qquad (1)$$

где A_r^* – нормированная реальная площадь контакта, G^* – нормированная амплитуда микронеровностей, φ – безразмерная характеристика материала, μ – коэффициент трения, D – дробная размерность профиля, k_e и k_p – коэффициенты упругого и пластического износа.

Сосенушкин Евгений Николаевич, доктор технических наук, профессор кафедры систем пластического деформирования. E-mail: sen@stankin.ru
Яновская Елена Александровна, кандидат технических наук, доцент кафедры прикладной математики. E-mail: elena_yanovskaya@bk.ru
Желнов Андрей Сергеевич, преподаватель кафедры прикладной математики, аспирант.

Для перехода к размерному объёму износа [5] применяется закон Арчарда:

$$V = Q\frac{WL}{H}, Q \approx C_{\text{scale}}\, Q^*, \tag{2}$$

где W – нормальная нагрузка, L – длина пути трения, H – твердость материала, C_{scale} – калибровочный множитель, подбираемый по экспериментальному эталону [6].

Для примера возьмем параметры конструкционной стали 45: $\mu = 0.2,\ N = 3,\ \sigma_y = 1 \cdot 10^9$ Па, $E' = 2.1 \cdot 10^{11}$Па, $\varphi \approx 0.0143,\ G^* = 1$ (что характерно для среднего уровня неровностей), $A_r^* = 0.05$ (истинный контакт ~5 % от номинальной площади), $k_e = 10^{-5},\ k_p = 5 \cdot 10^{-5}$– примем значения условно. Зададим диапазон D: 1.15–1.9 [3]. С помощью функции Q_star (D, Ar_star) определим нормированную скорость износа $Q^*(D)$ и построим график. Полученный график зависимости Q^* от дробной размерности представлен на рисунке 1.

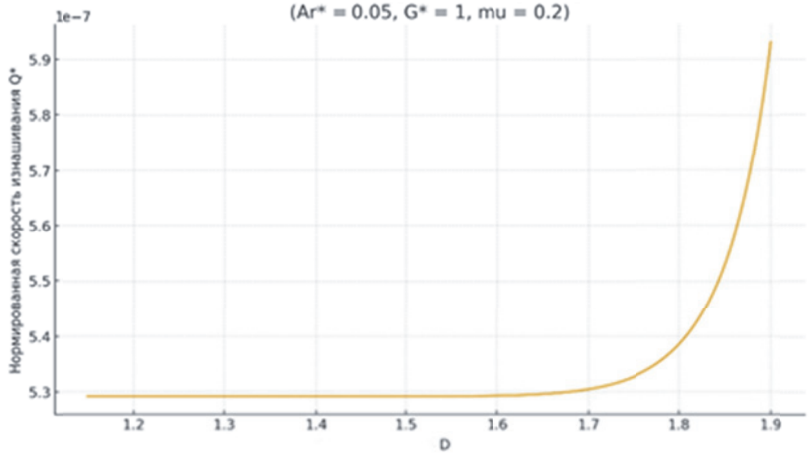

Рис. 1. Зависимость Q^* от дробной размерности D

Далее используем описанный ранее закон Арчарда. На этом этапе Q^* можно рассматривать либо, как Q, либо как величину, пропорциональную Q с некоторым калибровочным множителем C. Положим, для сравнительного анализа, что $C = 1$ (для реальных моделей параметр определяется исходя из эксперимента). Пусть нормальная нагрузка $W = 10$ кН, твёрдость $H = 7 \cdot 10^9$ Па, путь трения $L = 1000$ м. Тогда характерный объём износа [7] достигает порядка $(7.6–8.5) \cdot 10^{-10}$ м^3 на 1000 м пробега при заданных значениях. Эти значения соответствуют реальному масштабу износа стальных образцов при высоких нагрузках и сравнительно малых путях трения. На рисунке 2 можно видеть, как объём меняется при различных значениях D.

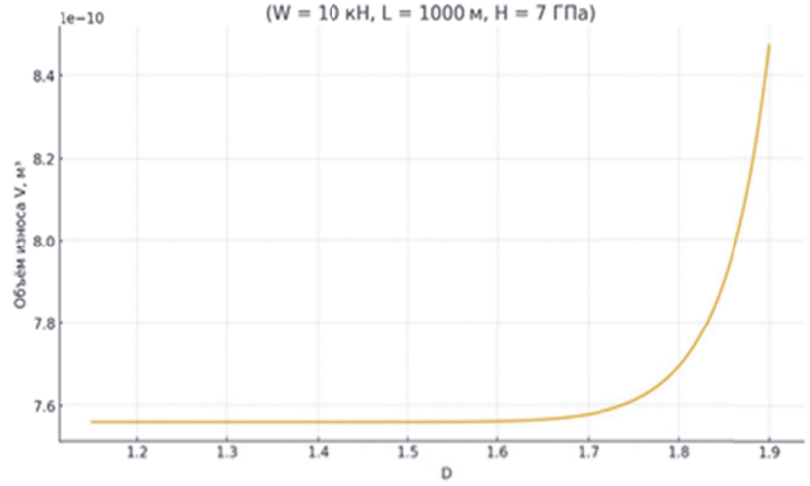

Рис. 2. Зависимость *V* от дробной размерности D

Зависимость монотонна в силу того, что значения $A_r{}^*$ и G^* зафиксированы, если варьировать величину реальной площади контакта $A_r{}^*$ картина будет ближе к той, что получена в работе [3]. Чтобы получить более полное представление о влиянии одновременно двух факторов — дробной размерности и действительной площади контакта — было выполнено двумерное моделирование

на прямоугольной сетке с заданными значениями $D = 1.15 \ldots 1.90$, $A_r^* = 0.01 \ldots 0.20$. На основе модуля построена карта объёма износа $V(D, A_r^*)$, изображенная на рисунке 3.

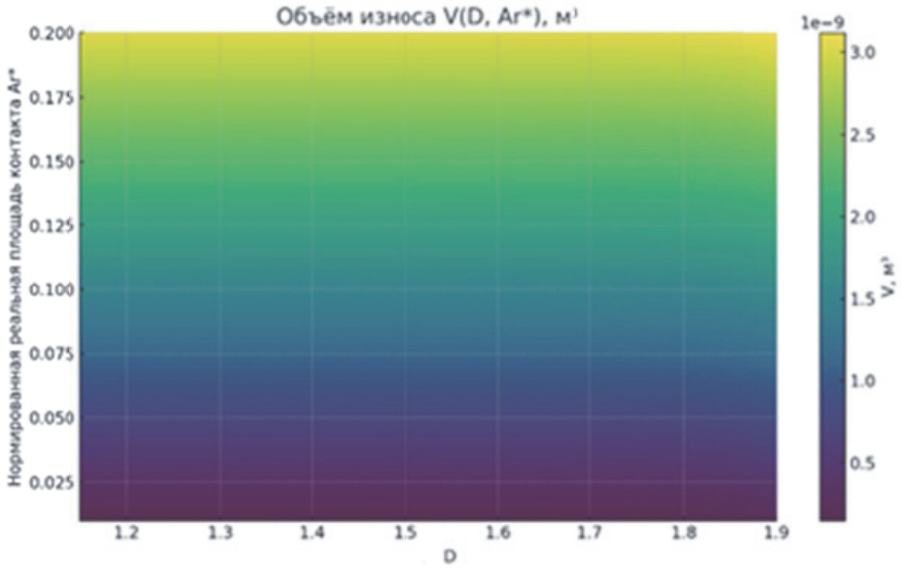

Рис. 3. Объем износа $V(D, A_r^*)$

По полученной карте видно, что основное влияние на объем износа оказывает величина истинной площади контакта. При увеличении A_r^* от 0.01 до 0.2 расчётный объём износа увеличивается более чем на порядок. При этом влияние D становится заметным именно при больших A_r^*, в области малых нагрузок, когда фактический контакт мал, изменения D практически не отражаются на износе.

Для демонстрации практического применения предложенной дробно-размерной модели были выполнены расчёты прогнозируемого объёма износа V для ряда материалов: конструкционная сталь, титан, алюминиевый сплав и высокотемпературный полимер [8]. Во всех примерах использовались одинаковые внешние условия: нормальная нагрузка $W = 10$ кН, путь трения $L = 1000$ м, коэффициенты износа: $k_e = 10^{-5}$, $k_p = 5 \cdot 10^{-5}$, $G^* = 1$, $N = 3$, масштабный множитель $C_{\text{scale}} = 1$. Для каждого материала приближенно заданы усредненные механические и трибологические свойства, представленные в таблице 1.

Таблица 1. Материалы и их основные характеристики

Материал	σ_y, ГПа	E', ГПа	H, ГПа	μ
Сталь 45	1.0	210	7.0	0.20
Ti–6Al–4V	0.88	110	3.5	0.25
Al 6061-T6	0.28	70	1.0	0.30
PEEK	0.10	4	0.25	0.35

Расчёты выполнены для трёх значений дробной размерности $D = 1{,}2;\ 1{,}5;\ 1{,}8$ и трёх значений нормированной истинной площади контакта $A_r^* = 0{,}02;\ 0{,}05;\ 0{,}10$. В таблице 2 приведён расчётный объём износа V в мм³ за 1000 м пути для конструкционной стали, титана, алюминиевого сплава и высокотемпературного полимера соответственно.

По полученным результатам видно, что при одинаковых внешних условиях объём износа возрастает в ряду сталь, титан, алюминий, полимер. Это обусловлено убыванием твёрдости и ростом коэффициента трения для соответствующих материалов. Влияние дробной размерности D для жёстких металлов (сталь, титан) выражено слабее, чем влияние A_r^*, однако для мягких материалов (PEEK) при больших D наблюдается резкое увеличение износа. Представленная численная модель позволяет количественно сопоставлять различные комбинации и выбирать наименее изнашиваемые варианты.

Таблица 2. Расчётный объём износа V для различных материалов

Материал	-	-	Сталь 45	Ti–6Al–4V	Al 6061-T6	PEEK
Сталь 45	D	A_r^*	V, мм³	V, мм³	V, мм³	V, мм³
1	1.2	0.02	0.302	0.623	2.253	9.355
2	1.2	0.05	0.756	1.557	5.634	23.388
3	1.2	0.10	1.512	3.113	11.269	46.776
4	1.5	0.02	0.302	0.623	2.254	9.533
5	1.5	0.05	0.756	1.557	5.635	23.566
6	1.5	0.10	1.512	3.114	11.269	46.954
7	1.8	0.02	0.316	0.672	2.318	35.296
8	1.8	0.05	0.769	1.606	5.699	49.329
9	1.8	0.10	1.525	3.163	11.333	72.717

ВЛИЯНИЕ ПАРАМЕТРОВ МОДЕЛИ НА ИЗНОС В ОЦЕНКЕ ЧЕРЕЗ SHAP И PARTIAL DEPENDENCE

На практике для интерпретации и измерения взаимосвязи между параметрами модели применяются сторонние инструменты такие, как SHapley Additive exPlanations и/или Partial dependence. SHAP (SHapley Additive exPlanations) — метод интерпретации прогнозов моделей машинного обучения. Он помогает понять, как модель принимает решения, и оценить, насколько каждый входной признак влияет на окончательный прогноз. В основе SHAP лежит концепция теории игр, разработанная Ллойдом Шепли в 1950-х годах [9, 10, 11, 12]. В свою очередь, Partial dependence — это метод измерения взаимосвязи между отдельным предиктором и результатом в модели прогнозирования. Он позволяет оценить, какая часть изменений в модели связана с конкретным входным признаком. В основе метода лежит пересчёт среднего значения предсказания модели машинного обучения после изменения одной или нескольких переменных, при этом фиксируя все другие входные данные, как постоянные. В результате становится понятно, насколько каждая переменная влияет на общий прогноз модели, а также насколько она чувствительна к любой заданной переменной.

В представленной работе Partial dependence использовался для оценки величины среднего износа, как функции одного заданного параметра. Построены графики зависимостей среднего объема износа V от дробной размерности D, нормированной реальной площади контакта A_r^* и нормированной амплитуды микронеровностей G^* по сетке значений, усредняя 2000 случайных комбинаций остальных параметров. Рассмотренные графики проиллюстрированы на рисунках 4, 5 и 6 соответственно.

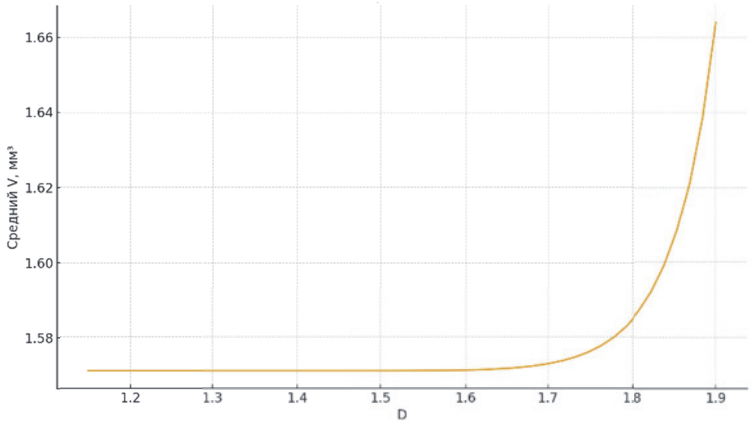

Рис. 4. PDP зависимость среднего объема износа V от дробной размерности

По графикам видно, что при изменении D в диапазоне 1.15–1.7 средний износ почти не меняется. Резкий рост начинается только при $D \gtrsim 1.8$. В «обычной» зоне размерностей влияние D вторично по сравнению с A_r^*. При этом по рисунку 5 видно, что для A_r^* получается почти идеальная линейная зависимость. При увеличении A_r^* с 0.01 до 0.2 средний износ растёт примерно от 0.15 до 3.0 мм³. Можно сделать вывод, что реальная площадь контакта A_r^* — это главный управляющий параметр модели, задающий масштаб износа, учитывая, что амплитуды микронеровностей слабо

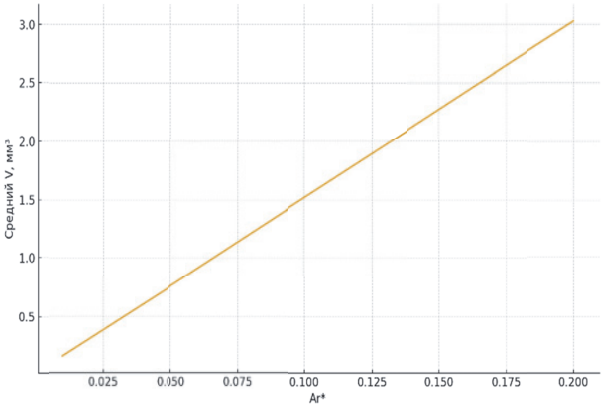

Рис. 5. PDP зависимость среднего объема износа V от ${A_r}^*$

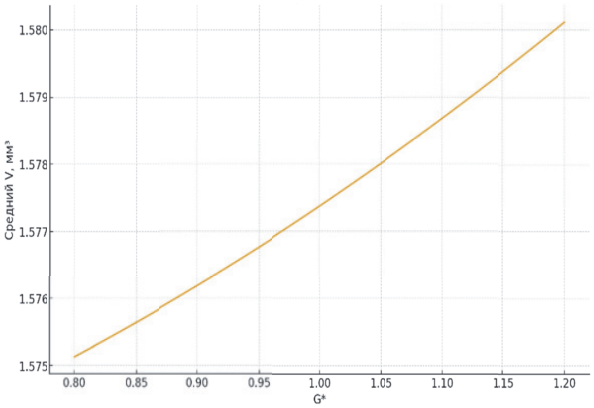

Рис. 6. PDP зависимость среднего объема износа V от G^*

влияют на объем износа. Для G^* при изменении значения от от 0.8 до 1.2 средний износ изменяется менее чем на 0.5 %. При фиксированных значениях D и A_r^* изменение амплитуды неровностей в разумных пределах почти не влияет на конечный результат.

Оценка вклада каждого параметра, влияющего на модель износа проводилась для 300 случайно выбранных точек из заданного датасета относительно базового состояния $x_0 = (D, A_r^*, G^*)$. Аналитически формулу для 3 признаков можно задать в следующем виде:

$$\phi_j = \frac{1}{3}(f(x_j) - f(x_0)) + \frac{1}{6}\sum_{k \neq j}(f(x_{j,k}) - f(x_k)), \quad (3)$$

где x_j– вектор, в котором j-й параметр берётся из рассматриваемого экземпляра, остальные – из базового, $x_{j,k}$– из экземпляра берутся j и k, остальные – из базового; $f(x_j)$ – модель износа V.

Далее определим важность признаков, как среднее по выборке абсолютное значение по формуле:

$$I_j = \mathbb{E}_i[\,|\,\phi_j^{(i)}\,|\,]\,. \quad (4)$$

В результате $D = 0.0042, A_r^* = 0.4591, G^* = 0.00023$.

По представленным оценкам видно, что реальная площадь контакта A_r^* даёт на порядок больший вклад в вариацию износа, чем параметры D и G^*. Этот результат подтверждает выводы, полученные с помощью Partial dependence. Дробная размерность D влияет существенно меньше на объем износа (около 1 % от влияния A_r^*), но его эффект нелинеен и проявляется преимущественно в области больших значений D. Влияние G^* на фоне других параметров можно считать второстепенным в рассматриваемых диапазонах.

ВЛИЯНИЯ ДРОБНОЙ РАЗМЕРНОСТИ НА ОСНОВНЫХ ДИАПАЗОНАХ: 1.15–1.5 И 1.6–1.9

Аналитическая модель нормированной скорости изнашивания (1) содержит три нелинейных по D термина, что делает поведение износа в разных диапазонах дробной размерности существенно различным. Чтобы системно объяснить результаты статьи [3], а также данные численного анализа, полученные с помощью Partial dependence и SHAP, разобьём диапазон D на две области: $D = 1.15 - 1.5$ (низкая–средняя дробная размерность) и $D = 1.6 - 1.9$ (высокая дробная размерность).

Рассмотрим диапазон низкой–средней дробной размерности. Показатель степени по формуле (1) в заданном диапазоне:

$$\frac{2}{D-1} \gg 1, \quad (5)$$

то есть для $D = 1.2$, показатель степени примерно равен 10, для $D = 1.5$, примерно 4. Так как материал-зависимая величина, например, для сталей, титана:

$$\varphi = \frac{N\sigma_y}{E'} \approx 10^{-2}, \quad (6)$$

то

$$\varphi^{\frac{2}{D-1}} \ll 1. \quad (7)$$

Следовательно, «пластическая» корректировка становится много меньше 1:

$$\left(k_e - k_p\right) \frac{DG^{*2}}{A_r^*(2-D)} \varphi^{\frac{2}{D-1}} \ll 1, \tag{8}$$

а значит зависимость от D исчезает:

$$Q^*(D) \approx k_e\, A_r^* \sqrt{1+3\mu^2}. \tag{9}$$

Фактически, при малой дробной размерности поверхность почти гладкая, профиль малоиррегулярен. Реальная площадь контакта определяется в основном макрогеометрией, а влияние «дробно-размерной структуры» ещё не проявилось. Микроконтакты имеют относительно широкие площадки, следовательно речь идет о квазистационарном упругом режиме, в котором роль остроконечных вершин мала. Это подтверждается и при численном анализе, SHAP показал близкую к нулю среднюю значимость D. Это связано именно с тем, что для значительной части диапазона (1.15–1.5) вклад D математически подавлен маленьким множителем $\varphi^{2/(D-1)}$. Partial dependence $V(D)$ почти горизонтален в этой зоне, что тоже подтверждает полученные результаты.

В то же время для диапазона $D \geq 1.6$:

$$2 < \frac{2}{D-1} < 3.5, \tag{10}$$

то есть теперь показатель степени является умеренной величиной, поэтому $\varphi^{2/(D-1)}$ уже не столь мал, например, при $D = 1.6$ значение $\varphi^{3.3} \approx 10^{-5}$, при $D = 1.8$ значение $\varphi^{2.5} \approx 10^{-4.5}$. То есть величина становится сравнима или больше, чем малые величины, использованные в коэффициентах k_e, k_p. Получается, что при увеличении значения D возрастает $Q^*(D)$. А значит, поверхность резко становится самоподобной на разных масштабах, число вершин на единицу площади увеличивается, они становятся более острыми, так как увеличиваются локальные градиенты. Нагрузка по площади перераспределяется на множество мелких микроконтактов, что приводит к увеличению локальных давлений. Это приводит к увеличению доли пластических микроконтактов, росту локальных напряжений и усилению микросколов и адгезионных «отрывов».

Можно сделать вывод, что в диапазоне $D = 1.6 - 1.9$ рост дробной размерности вызывает ощутимый рост износа, поскольку дробно-размерная модель переходит в зону, где доминируют высокие локальные давления и пластические контакты.

РАСЧЁТ ОПТИМАЛЬНОЙ ОБЛАСТИ ДРОБНОЙ РАЗМЕРНОСТИ ДЛЯ МИНИМАЛЬНОГО ИЗНОСА

Определим, как на практике можно найти оптимальную область дробной размерности, ориентируясь на результаты, полученные ранее. Для примера, рассмотрим конструкционную сталь “Сталь 45”. Возьмем численно производную объема износа по величине дробной размерности по формуле:

$$\frac{dV}{dD} \approx \frac{V(D+h) - V(D-h)}{2h} \tag{11}$$

с шагом $h = 10^{-3}$, используя ту же модель, что и ранее ($W = 10$ кН, $L = 1000$ м, $H = 7$ ГПа).

На рисунке 7 в области низкой-средней дробной размерности график практически приближен к нулю.

Рост производной начинается ближе к 1.45–1.5, но величины производной порядка 10^{-4} мм³ на единицу D в зоне изменения D почти не влияет на износ. Модель подтверждает ранее сделанный теоретический вывод.

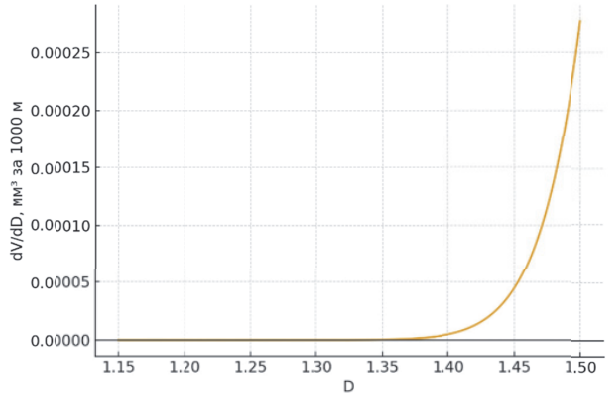

Рис. 7. Производная объёма износа от дробной размерности в зоне 1.15–1.5 для Стали 45

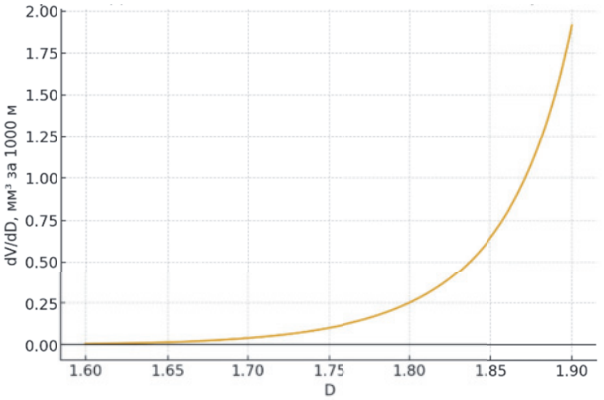

Рис. 8. Производная объёма износа от дробной размерности в зоне 1.6–1.9 для Стали 45

В области высокой дробной размерности, как видно на рисунке 8, производная резко увеличивается.

То есть небольшой прирост D в верхней части диапазона приводит к заметному росту износа. Если рассмотреть подробнее весь диапазон размерности с шагом 0.0015 при фиксированных $A_r^* = 0.05$, $G^* = 1$, получим, что минимум объема износа достигается на краю диапазона, то есть при $D_{opt} \approx 1.15$ объём износа $V(D_{opt}) \approx 0.756$ [13, 14]. Таким образом, для конструкционной стали оптимальным с точки зрения износостойкости [15] является диапазон дробной размерности $D \lesssim 1.4$, тогда как при $D \to 1.9$ прогнозируемый износ увеличивается более чем на 10 %.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ланской, Е.Н.* Автоматизация проектирования групповых процессов холодной и полугорячей объемной штамповки в многономенклатурном производстве деталей / Е.Н. Ланской, Е.Н. Сосенушкин. –М., 1989. –84 с. (Производство. Сер. Технология и оборудование кузнечно-штамповочного производства: Обзорная информация / ВНИИТЭМР. Вып. 6).
2. *Сосенушкин, Е.Н.* Прогрессивные процессы объемной штамповки / Е.Н. Сосенушкин. –М.: Машиностроение, 2011. – 480 с.
3. *Сосенушкин, Е.Н.* Компьютерное моделирование фрактальных поверхностей, построенных с использованием методов искусственного интеллекта, для прогнозирования износа / Е.Н. Сосенушкин, Е.А. Яновская, А.С. Желнов // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. – 2024. – № 4. – С. 143–149.
4. *Сосенушкин, Е.Н.* Классификация деталей с использованием методов искусственного интеллекта при выборе математической модели для решения задач пластического течения / Е.Н. Сосенушкин, Е.А. Яновская, А.С. Желнов // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. – 2025. – № 2. – С. 170-179.
5. *Ишлинский, А.Ю.* Математическая теория пластичности / А.Ю. Ишлинский, Д.Д. Ивлев. – М.: Физматлит, 2001. – 704 с.
6. *Сосенушкин, Е.Н.* Математическая модель адгезионного износа штампов объемной штамповки / Е.Н. Сосенушкин, А.В. Хроменков, Ю.А. Мельник // Трение и износ. – 2014. – Т. 35. – № 6. – С. 752–758.
7. *Артес, А.Э.* Групповое производство деталей холодной объемной штамповкой / А.Э. Артес. – М.: Машиностроение, 1991. – 192 с.
8. *Краев Л.Ф.* Построение классификатора поковок штампованных и кованых / Л.Ф. Краев // Кузнечно-штамповочное производство. – 1975. – № 2. – С. 20–22.
9. *Аткинсон, Р.* Введение в математическую теорию обучения / Р. Аткинсон, Г. Бауэр, Э. Крозерс. – М.: Мир, 1969. – 486 с.
10. *Загоруйко, Н.Г.* Методы распознавания и их применение / Н.Г. Загоруйко. – М.: Советское радио, 1972. – 206 с.
11. *Айзерман, М.А.* Метод потенциальных функций в теории обучения машин / М.А. Айзерман, Э.М. Браверман, Л.И. Розоноэр. – М.: Наука, 1970. – 383 с.
12. *Дорофеюк, А.А.* Алгоритмы автоматической классификации / А.А. Дорофеюк // В кн.: Проблемы расширения возможностей автоматов. – М.: Институт проблем управления АН СССР, 1971. – Вып. 1. – С. 5–41.
13. *Исаченко, Н.Е.* Классификация деталей при решении задачи оценки уровня технологических процессов обработки металлов давлением / Н.Е. Исаченко // Кузнечно-штамповочное производство. – 1981. – № 4. – С. 32–35.
14. *Евстифеев, Б.Б.* Классификация технологических процессов холодной объемной штамповки. Вопросы групповой технологии / Б.Б. Евстифеев, А.Э. Артес. – М.: Машиностроение, 1987. – 80 с.
15. *Сосенушкин, Е.Н.* Автоматизированная система выбора материалов для штампов холодной и полугорячей объемной штамповки / Е.Н. Сосенушкин // В сб.: Актуальные проблемы пластической обработки металлов. – Варна, 1990. – С. 379–385.

THE EFFECT OF FRACTIONAL DIMENSION OF A ROUGH SURFACE MODEL ON TRIBOLOGICAL TESTS

© 2026 E.N. Sosenushkin, E.A. Yanovskaya, A.S. Zhelnov

Moscow State Technological University “STANKIN”, Moscow, Russia

In computer modeling of surfaces with fractional dimensions for wear prediction, an important issue is the correspondence of such dimensionality to real physical quantities. Relying on the constructed models and geometry for validation of the obtained results [1, 2], confirmation through a full-scale experiment is required. This paper presents a methodological approach for a coherent transition from a fractional-dimensional description of surface microrelief to real physical and mechanical parameters of friction and wear, allowing the model to be compared with tribological experiments. The analytical transformation is carried out in several stages: first, a range of dimensionality is set. Next, the real contact area is modeled as a function of the given dimensionality, considering the influence of the contact area on the amount of surface wear. The contact area is considered as a function of the friction model construction. Wear is calculated using the Archard equation, which relates to fractional dimension, hardness, and friction coefficient. As a result, numerical modeling was performed for the transition to real parameters, wear modeling, and calculations for various materials. The influence of the main parameters on the wear volume was determined using the SHAP method and partial dependence plots. The main regions of dimensionality variation were identified, and the effect of this dimensionality on wear within these regions was examined. Calculations were carried out for specific material to determine the region of minimum wear, which can be used in future full-scale tribological wear experiments.

Keywords: mathematical and computer modeling; numerical modeling; wear; tribology.

DOI: 10.37313/1990-5378-2026-28-4-161-168
EDN: IEMBQJ

REFERENCES

1. *Lanskoj, E.N.* Avtomatizaciya proektirovaniya gruppovyh processov holodnoj i polugoryachej ob»emnoj shtampovki v mnogonomenklaturnom proizvodstve detalej / E.N. Lanskoj, E.N. Sosenushkin. –M., 1989. –84 s. (Proizvodstvo. Ser. Tekhnologiya i oborudovanie kuznechno-shtampovochnogo proizvodstva: Obzornaya informaciya / VNIITEMR. Vyp. 6).
2. *Sosenushkin, E.N.* Progressivnye processy ob»emnoj shtampovki / E.N. Sosenushkin. –M.: Mashinostroenie, 2011. – 480 s.
3. *Sosenushkin, E.N.* Komp'yuternoe modelirovanie fraktal'nyh poverhnostej, postroennyh s ispol'zovaniem metodov iskusstvennogo intellekta, dlya prognozirovaniya iznosa / E.N. Sosenushkin, E.A. Yanovskaya, A.S. Zhelnov // Izvestiya Samarskogo nauchnogo centra Rossijskoj akademii nauk. – 2024. – № 4. – S. 143–149.
4. *Sosenushkin, E.N.* Klassifikaciya detalej s ispol'zovaniem metodov iskusstvennogo intellekta pri vybore matematicheskoj modeli dlya resheniya zadach plasticheskogo techeniya / E.N. Sosenushkin, E.A. Yanovskaya, A.S. Zhelnov // Izvestiya Samarskogo nauchnogo centra Rossijskoj akademii nauk. – 2025. – № 2. – S. 170-179.
5. *Ishlinskij, A.Yu.* Matematicheskaya teoriya plastichnosti / A.Yu. Ishlinskij, D.D. Ivlev. – M.: Fizmatlit, 2001. – 704 s.
6. *Sosenushkin, E.N.* Matematicheskaya model' adgezionnogo iznosa shtampov ob»emnoj shtampovki / E.N. Sosenushkin, A.V. Hromenkov, Yu.A. Mel'nik // Trenie i iznos. – 2014. – T. 35. – № 6. – S. 752–758.
7. *Artes, A.E.* Gruppovoe proizvodstvo detalej holodnoj ob'emnoj shtampovkoj / A.E. Artes. – M.: Mashinostroenie, 1991. – 192 s.
8. *Kraev L.F.* Postroenie klassifikatora pokovok shtampovannyh i kovanyh / L.F. Kraev // Kuznechno-shtampovochnoe proizvodstvo. – 1975. – № 2. – S. 20–22.
9. *Atkinson, R.* Vvedenie v matematicheskuyu teoriyu obucheniya / R. Atkinson, G. Bauer, E. Krozers. – M.: Mir, 1969. – 486 s.
10. *Zagorujko, N.G.* Metody raspoznavaniya i ih primenenie / N.G. Zagorujko. – M.: Sovetskoe radio, 1972. – 206 s.
11. *Ajzerman, M.A.* Metod potencial'nyh funkcij v teorii obucheniya mashin / M.A. Ajzerman, E.M. Braverman, L.I. Rozonoer. – M.: Nauka, 1970. – 383 s.
12. *Dorofeyuk, A.A.* Algoritmy avtomaticheskoj klassifikacii / A.A. Dorofeyuk // V kn.: Problemy rasshireniya vozmozhnostej avtomatov. – M.: Institut problem upravleniya AN SSSR, 1971. – Vyp. 1. – S. 5–41.
13. *Isachenko, N.E.* Klassifikaciya detalej pri reshenii zadachi ocenki urovnya tekhnologicheskih processov obrabotki metallov davleniem / N.E. Isachenko // Kuznechno-shtampovochnoe proizvodstvo. – 1981. – № 4. – S. 32–35.
14. *Evstifeev, B.B.* Klassifikaciya tekhnologicheskih processov holodnoj ob»emnoj shtampovki. Voprosy gruppovoj tekhnologii / B.B. Evstifeev, A.E. Artes. – M.: Mashinostroenie, 1987. – 80 s.
15. *Sosenushkin, E.N.* Avtomatizirovannaya sistema vybora materialov dlya shtampov holodnoj i polugoryachej ob"emnoj shtampovki / E.N. Sosenushkin // V sb.: Aktual'nye problemy plasticheskoj obrabotki metallov. – Varna, 1990. – S. 379–385.

Evgeny Sosenushkin, Doctor of Technical Sciences, Professor of the Department of Plastic Deformation Systems.
E-mail: sen@stankin.ru
Elena Yanovskaya, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Applied Mathematics.
E-mail: elena_yanovskaya@bk.ru
Andrey Zhelnov, Lecturer of the Department of Applied Mathematics,
postgraduate student. E-mail: a.zhelnov@stankin.ru