УДК 532.59 : 533.6

ПРИМЕНЕНИЕ МОДИФИЦИРОВАННОГО ПОЛУЛАГРАНЖЕВОГО МЕТОДА ТИПА ГОДУНОВА ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ РАЗБЕГА ОДНОМЕРНЫХ ВОЛН РАЗРЕЖЕНИЯ В СВЕРХЗВУКОВОМ ДИАПАЗОНЕ

© 2026 В.В. Никонов

Самарский национальынй исследовательский университет имени академика С.П. Королева, г. Самара, Россия

Статья поступила в редакцию 21.04.2026

Моделирование течений в зоне, находящейся сразу за обтекаемым телом, является важной задачей для получения коэффициента аэродинамического сопротивления этого тела. В одномерном случае эта задача сводится к моделированию разбегающихся волн разрежения. В этой статье предлагается модифицированный полулагражевый численный метод и рассматривается его применение к задаче моделирования разбега одномерных волн разрежения в сверхзвуковом диапазоне. Известно, что одним из недостатков методов типа Эйлера для точного разрешения масштабов плавного потока и одновременным выявлением разрывов является неточное определение профиля скорости при моделировании разбега волн разрежения при больших скоростях. Ранее автором был предложен полулагранжев метод Годунова без численной вязкости для ударных волн, который позволял моделировать ударные волны без их размазывания на несколько ячеек сетки, что являлось его преимуществом в отличие от методов Эйлера. Как и в предыдущих работах автора в предлагаемом методе решаются одномерные уравнения Эйлера, но они разбиваются на части, описывающие конвекцию и акустические процессы отдельно с соответствующими разными шагами по времени. Нововведение в предлагаемом методе заключается в добавлении условия, чтобы распространение точных решений (полученных с помощью решателя Годунова) с местной «акустической» скоростью не обгоняло не только решение впереди идущей ударной волны, но и границу раздела разбегающихся волн разрежения, которая существует в моделируемой задаче. Результаты численного анализа тестовой задачи, полученные с помощью модифицированного метода, сравниваются с данными метода автора, опубликованного в 2025 г., и с результатами схемы Total Variation Deminishing (TVD). В результате делается вывод о превосходстве предложенного метода над рассмотренными методами в сверхзуковом диапазоне.

Ключевые слова: газ, волна разрежения, задача Римана, метод Годунова, подход Лагранжа, сверхзвук

DOI: 10.37313/1990-5378-2026-28-4-195-201
EDN: JIIGMN

Статья подготовлена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, грант № 075-15-2025-610.

ВВЕДЕНИЕ

Моделирование сжимаемых течений, и в частности, разбега одномерных волн разрежения в сверхзвуковом диапазоне, является сложной задачей из-за изменения скорости потока в широких пределах. При этом одна граница волны разрежения движется с очень большой скоростью, а вторая – с малой скоростью. Было предложено множество методов типа Эйлера с высоким разрешением для точного определения параметров плавного потока, например: метод искусственной вязкости [1, 2], метод уменьшения полной вариации (TVD) [3], существенно бесколебательная схема (ENO) [4] и взвешенная существенно бесколебательная схема (WENO) [5]. Одним из недостатков методов [1-5] является неточное определение профиля скорости при моделировании разбега волн разрежения при больших скоростях.

В работе [6] автором данной статьи был предложен метод, использующий подход Лагранжа к рассмотрению движения сжимаемой сплошной среды и фиксированную однородную сетку. Позже в [7] была описана реализация граничных условий для твердой стенки. В этих работах было показано, что у данного метода отсутствует численная вязкость на ударных волнах. В статье автора [8] предлагалась модификация этого метода, заключавшаяся в изменении формулы расчёта плотности сплошной среды для волн разрежения. Было установлено, что данная формула позволяет получать хорошие результаты для всех видов тестовых задач, решенных в [6, 7]. В то время, как в работе [7] для получения успешных результатов использовались две разные формулы: линейный закон рас-

Никонов Валерий Владимирович, кандидат технических наук, доцент кафедры конструкции и проектирования летательных аппаратов. E-mail: nikonov.vv@ssau.ru

пределения параметров потока в волне разрежения для задачи Шу и Ошер об ударной трубе [9] и нелинейный закон из [6] для остальных рассмотренных задач. В работах [10, 11] описывается модификация метода, предложенного в [6], [7]. Нововведение заключается в учете дополнительного условия о направлении ударной волны на этапе расчёта подшага акустики. При этом данное новшество, внесенное в схему метода, не влияет на результаты уже рассмотренных в [7, 8] тестовых задач, а проявляется только при численном решении второй тестовой задачи с более сильной ударной волной, приведенной в работах [10, 11].

В предлагаемой работе описывается дальнейшая модификация метода для приложения к моделированию разбега одномерных волн разрежения в сверхзвуковом диапазоне.

1. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ И ИДЕЯ МЕТОДА

Уравнения Эйлера одномерной задачи движения сжимаемой сплошной среды в размерных переменных имеют вид

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \rho}{\partial t} + u\frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho\frac{\partial u}{\partial x} = 0,\\
&\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{t}} + \mathrm{u}\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{x}} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \mathrm{p}}{\partial \mathrm{x}} = 0,\\
&\frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathrm{t}} + \mathrm{u}\frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathrm{x}} + \frac{\mathrm{p}}{\rho}\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{x}} = 0.
\end{aligned} \tag{1}$$

Здесь u – скорость, ρ – плотность, ε – внутренняя удельная энергия, p – давление, x – координата, t – время.

Система уравнений (1) замыкается с помощью уравнения состояния для идеального газа

$$p = (\kappa - 1)\rho\varepsilon, \tag{2}$$

где κ – показатель адиабаты.

Как и в предыдущих статьях [6-8], [10, 11], в данной работе предлагается следующий метод: этапы конвекции и акустики рассматриваются отдельно, разбиение на физические процессы производится потому, что локальная акустическая скорость (скорость звука)

$$c = \sqrt{\kappa\frac{p}{\rho}}$$

может сильно отличаться от конвективной скорости потока. Таким образом, на акустическом этапе решается система

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho\frac{\partial u}{\partial x} = 0,\\
&\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = 0,\\
&\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{p}{\rho}\frac{\partial u}{\partial x} = 0
\end{aligned} \tag{3}$$

и уравнение (2). Система (3) получается из (1) отбрасыванием конвективных членов.

Если переменные перед частными производными заменить их постоянными значениями, мы можем получить из (3) характеристическую форму

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial w_1}{\partial t} - c\frac{\partial w_1}{\partial x} = 0,\\
&\frac{\partial \mathrm{w}_2}{\partial \mathrm{t}} = 0,\\
&\frac{\partial w_3}{\partial t} + c\frac{\partial w_3}{\partial x} = 0,
\end{aligned} \tag{4}$$

где

$$w_1 = -\frac{c^*}{\kappa\rho^*}\rho + u - \frac{\kappa - 1}{c^*}\varepsilon,$$

$$w_2 = \rho - \frac{\kappa\rho^*}{c^{*2}}\varepsilon, \tag{5}$$

$$w_3 = \frac{c^*}{\kappa\rho^*}\rho + u + \frac{\kappa - 1}{c^*}\varepsilon.$$

Здесь звездочка указывает на постоянные значения. Уравнения (4) описывают движение двух волн со скоростями $-c$ и c и их соответствующими значениями переноса w_1 и w_3 (5).

Систему уравнений (4) можно решить, используя предложенный лагранжев подход. Однако в этой статье мы используем точный решатель Годунова [12] для решения полной нелинейной системы (1), (2), а затем вычитаем конвективную скорость из решения, чтобы получить решение уравнения (3). Более подробное описание метода приводится, в частности, в работе [11].

Шаг по времени ${}_\Delta t_c$ на этапе акустики выбирался согласно критерию Куранта:

$${}_\Delta t_c = k_c \frac{h}{c_s}, \tag{6}$$

где c_s – максимальная акустическая скорость разрежения, а k_c – целое число. Если, например, $k_c = 3$, тогда волна распространяется на три ячейки сетки на подшаге акустики.

Модификация предлагаемого в данной статье метода по сравнению с работами [10, 11] заключается в ведении условия, чтобы распространение решений w_1 и w_3 с местной «акустической» скоростью не обгоняло (не затирало) не только решение впереди идущей ударной волны, но и границу раздела разбегающихся волн разрежения, если таковые существуют. При этом для соседних ячеек i и $i+1$ проверяется условие

$$(u_i < -10^{-4}) \bigcup (u_{i+1} > 10^{-4}). \tag{7}$$

На этапе конвекции решаем систему только с конвективными членами

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + u\frac{\partial\rho}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial t} + u\frac{\partial\varepsilon}{\partial x} = 0,$$

также как систему уравнений (4).

Шаг по времени на стадии конвекции выбирался аналогичным (6) образом:

$${}_\Delta t_u = k_u \frac{h}{u_s}, \tag{8}$$

где u_s – максимальная конвективная скорость волны разрежения, а k_u – тоже целое число. Например, если $k_u = 2$, тогда волна распространяется на две ячейки сетки на подшаге конвекции. Если ${}_\Delta t_c \neq {}_\Delta t_u$, тогда маршевый шаг ${}_\Delta t$ выбирается, как

$${}_\Delta t_c = n_c \, {}_\Delta t,$$

$${}_\Delta t_u = n_u \, {}_\Delta t,$$

где n_c и n_u – целые числа. Более подробно численная схема метода приводится в работах [6-8], [10, 11].

2. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

В этом разделе мы применяем предложенный метод для решения задачи разбега одномерных волн разрежения с числом Маха $M = 2.2$, которая имеет следующие начальные условия:

$$p_j^0 = 101325.0,\ u_j^0 = -748.64,\ \rho_j^k = 1.225, \text{ если } x_j < 0,$$

$$p_j^0 = 101325.0,\ u_j^0 = 748.64,\ \rho_j^k = 1.225, \text{ если } x_j > 0, \tag{9}$$

Область моделирования принималась равной $x \in [-50;50]$, сетка содержала 1000 ячеек, шаг сетки составлял $h = 0.1$. Шаг по времени для процесса «акустики» выбирался согласно критерию Куранта-Фридриха-Леви (6), где $k_c = 11$, т.е. скоростная часть волны разрежения на этапе «акустики» перемещалась со скоростью $c_s = 340.3$ на 11 ячеек сетки, а самая медленная часть - со скоростью $c = 190.56$ на 6 ячеек сетки.

Шаг по времени для процесса конвекции выбирался по аналогичному правилу (8), где $k_u = 24$, т.е. скоростная часть волны разрежения на этапе конвекции перемещалась на 24 ячейки сетки со скоростью $u_s = 748.64$. Маршевый шаг равнялся $_{\Delta}t = 0.0032$. Этапы «акустики» и конвекции выполнялись на каждом шаге по времени, т.е. $_{\Delta}t_c = {}_{\Delta}t_u = {}_{\Delta}t$.

Результаты расчётов для трёх методов: схемы TVD Хартена [3], метода предыдущей работы автора [11] и предложенного в данной работе, - в момент времени $t = 0.032$ показаны на рис. 1-5, Предложенная модификация полулагранжевого численного метода с условием (7) позволяет получить более точный метод в то время, как в методе, описанном в [11], более медленная граница волны разрежения распространяется с большей скоростью, чем точное решение. С помощью схемы TVD не удаётся получить центральную зону разрежения с постоянными минимальными параметрами течения (см. рис. 3).

На основании полученных результатов можно сделать вывод, что предлагаемая схема метода имеет преимущество по учёту качественных особенностей течения и точности решения по сравнению со схемой TVD Хартена [3] и методом предыдущей работы автора.

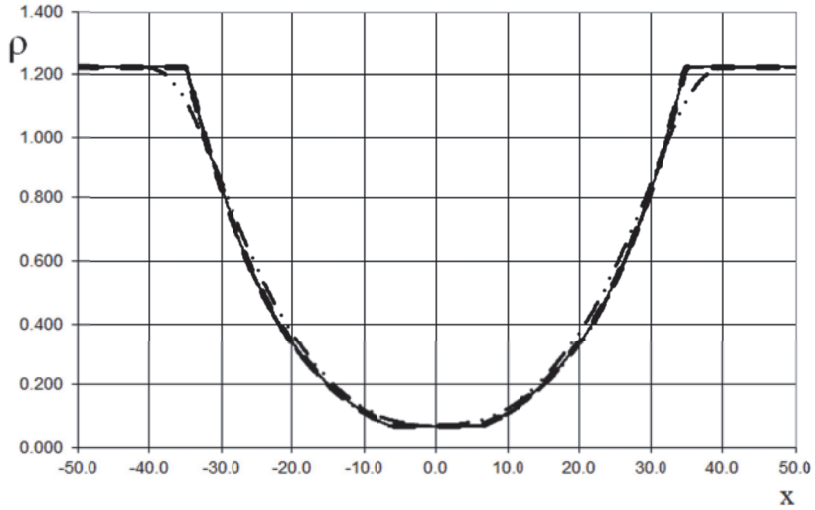

Рис. 1. Распределение плотности в задаче о разбеге одномерных волн разрежения (9): ——— - точное решение, — • — - решение предыдущей работы автора [11], - - - - предлагаемый метод, — • • - решение схемы TVD [3]

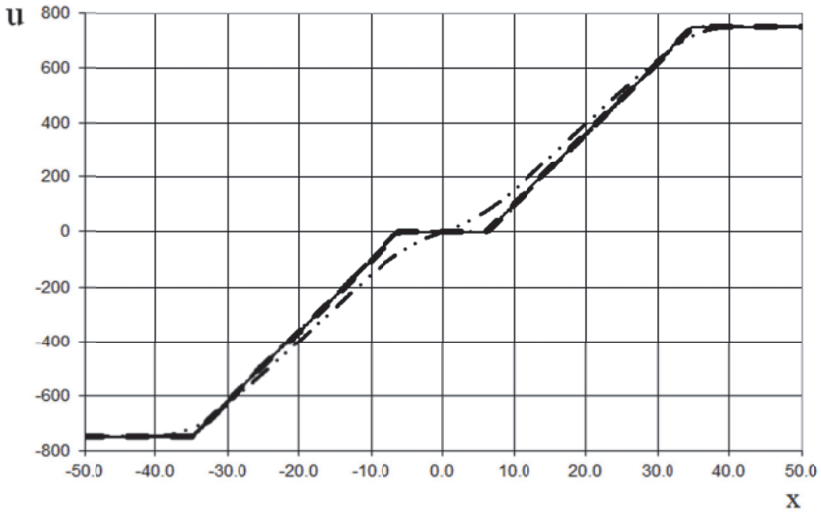

Рис. 2. Распределение скорости в задаче о разбеге одномерных волн разрежения (9): ——— - точное решение, — • — - решение предыдущей работы автора [11], - - - - предлагаемый метод, — • • - решение схемы TVD [3]

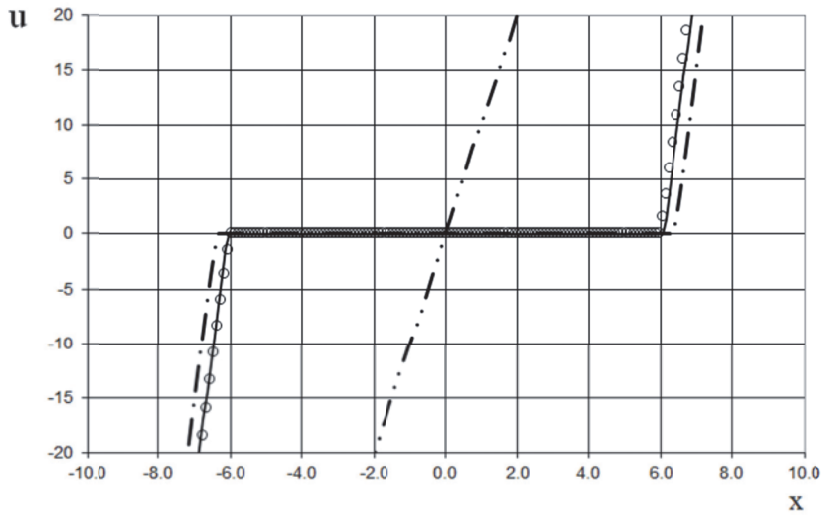

Рис. 3. Распределение скорости (увеличенный масштаб)
в задаче о разбеге одномерных волн разрежения (9):
- точное решение, - решение предыдущей работы автора [11],
- предлагаемый метод, - решение схемы TVD [3]

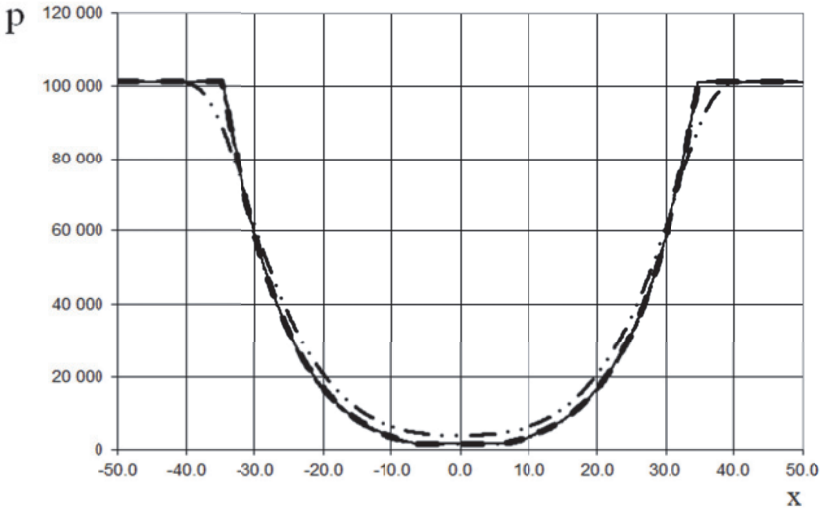

Рис. 4. Распределение давления в задаче о разбеге одномерных волн разрежения (9):
- точное решение, - решение предыдущей работы автора [11],
- предлагаемый метод, - решение схемы TVD [3]

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *von Neumann, J., Richtmyer, R.D.* A method for the numerical calculation of hydrodynamic shocks // J. Appl. Phys. v. 21. 1950. P. 232.
2. *Jameson, A.* Analysis and design of numerical schemes for gas dynamics, 1: Artificial diffusion, upwind biasing, limiters and their effect on accuracy and multigrid convergence // Int. J. Comput. Fluid Dyn. v. 4. 1994. P. 171–218.
3. *Harten, A.* High resolution schemes for hyperbolic conservation laws // J. of Comp. Phys. v. 49. 1983. P. 357-393.
4. *Harten, A., Engquist, B., Osher, S., Chakravarthy, S.R.* Uniform high order accurate essentially non-oscillatory schemes, III. // J. Comput. Phys. v. 71. 1987. P. 231–303.
5. *Liu, X.D., Osher, S., Chan, T.* Weighted essentially non-oscillatory schemes // J. Comput. Phys. v. 115. 1994. P. 200–212.
6. *Никонов, В.В.* Применение подхода Лагранжа к решению одномерной задачи распространения ударных волн в газе / В.В. Никонов, В.Г. Шахов // Известия Самарского научного центра РАН. – 2011. – Т. 13. – № 6. – С. 136-141.
7. *Nikonov, V.* A Semi-Lagrangian Godunov-Type Method without Numerical Viscosity for Shocks // Fluids. v. 7. 2022. P. 16. https://doi.org/10.3390/fluids7010016.
8. *Никонов, В.В.* Математическое моделирование сжимаемых одномерных течений с помощью полулагранжевого численного метода Годунова без вычислительной вязкости для ударных волн / В. В. Никонов // Известия Самарского научного центра РАН. 2024. – Т. 26. – № 3. – С. 147-163.
9. *Taylor, E.M., Wu, M., Martin, M.P.* Optimization of Nonlinear Error for Weighted Essentially Non-Oscillatory Methods in Direct Numerical Simulations of Compressible Turbulence // J. Comput. Phys. v. 223. 2007. P. 384-397.

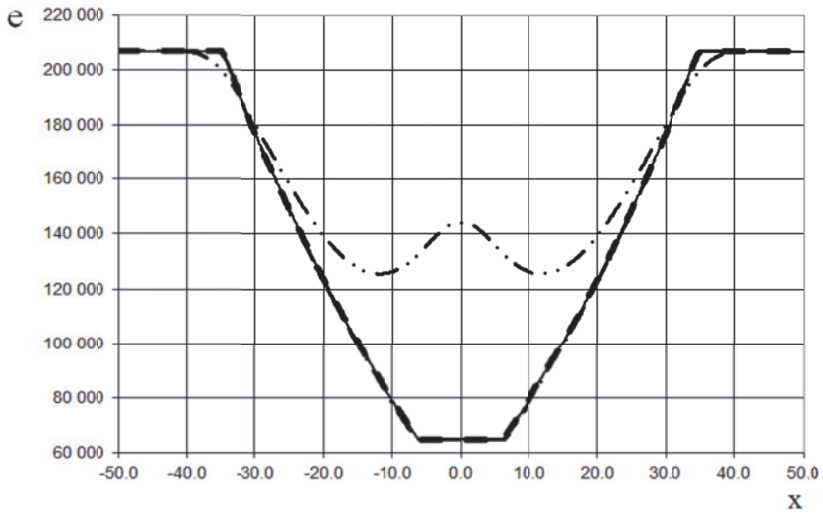

Рис. 5. Распределение энергии в задаче о разбеге одномерных волн разрежения (9): ——— - точное решение, — · — - решение предыдущей работы автора [11], - - - - предлагаемый метод, — · · — - решение схемы TVD [3]

10. *Никонов, В. В.* Математическое моделирование поглощения относительно более сильной ударной волной более слабой ударной волны с помощью полулагранжевого численного метода Годунова без вычислительной вязкости для ударных волн / В. В. Никонов // Известия Самарского научного центра РАН. – 2024. – Т. 26. – № 6. – С. 185–199.
11. *Nikonov, V.* Modified Semi-Lagrangian Godunov-Type Method without Numerical Viscosity for Shocks // Fluids. v. 10. 2025. P. 133. DOI: 10.3390/fluids10050133.
12. *Годунов, С.К.* Численное решение многомерных задач газовой динамики / С.К. Годунов, А.В. Забродин, М.Я. Иванов, А.Н. Крайко, Г.П. Прокопов. М.: Наука, 1976. 400 с.

APPLICATION OF A MODIFIED GODUNOV-TYPE SEMI-LAGRANGIAN METHOD TO THE SIMULATION OF ONE-DIMENSIONAL RAREFACTION WAVE PROPAGATION IN THE SUPERSONIC RANGE

© 2026 V.V. Nikonov

Samara National Research University named after Academician S.P. Korolyov, Samara, Russia

The simulation of flows in the region immediately downstream of a streamlined body is essential for determining the aerodynamic drag coefficient of that body. In the one-dimensional case, this problem reduces to modeling the propagation of rarefaction waves. This paper proposes a modified semi-Lagrangian numerical method and examines its application to the simulation of one-dimensional rarefaction wave propagation in the supersonic range. It is known that one of the drawbacks of high-resolution Eulerian methods—designed to accurately resolve smooth flow scales while simultaneously capturing discontinuities—is the inaccurate determination of the velocity profile when simulating high-speed rarefaction wave propagation, particularly in regions at high speeds. In previous work, the author introduced a semi-Lagrangian Godunov method that operates without numerical viscosity for shock waves. This approach enabled the simulation of shock waves without smearing them over several grid cells, offering a distinct advantage over conventional Eulerian methods. As in the author's earlier studies, the proposed method solves the one-dimensional Euler equations by splitting them into components representing convection and acoustic processes, each treated with different time steps. The innovation of the current method lies in the inclusion of an additional condition that ensures the propagation of exact solutions (obtained using the Godunov solver) at the local acoustic speed does not outpace not only the leading shock wave but also the interface of the propagating rarefaction waves present in the simulated problem. Numerical results from a test problem, obtained using the modified method, are compared with those from the author's 2025 method and with results from the Total Variation Diminishing (TVD) scheme. Based on this comparison, it is concluded that the proposed method outperforms the other methods considered in the supersonic range.

Key words: gas, double expansion wave, Riemann problem, Godunov method, Lagrange approach, supersonic flow

DOI: 10.37313/1990-5378-2026-28-4-195-201
EDN: JIIGMN

REFERENCES

1. *von Neumann, J., Richtmyer, R.D.* A method for the numerical calculation of hydrodynamic shocks // J. Appl. Phys. v. 21. 1950. P. 232.
2. *Jameson, A.* Analysis and design of numerical schemes for gas dynamics, 1: Artificial diffusion, upwind biasing, limiters and their effect on accuracy and multigrid convergence // Int. J. Comput. Fluid Dyn. v. 4. 1994. P. 171–218.
3. *Harten, A.* High resolution schemes for hyperbolic conservation laws // J. of Comp. Phys. v. 49. 1983. P. 357-393.
4. *Harten, A., Engquist, B., Osher, S., Chakravarthy, S.R.* Uniform high order accurate essentially non-oscillatory schemes, III // J. Comput. Phys. v. 71. 1987. P. 231–303.
5. *Liu, X.D., Osher, S., Chan, T.* Weighted essentially non-oscillatory schemes // J. Comput. Phys. v. 115. 1994. P. 200–212.
6. *Nikonov, V.V.* Primenenie podhoda Lagranzha k resheniyu odnomernoj zadachi rasprostraneniya udarnyh voln v gaze / V.V. Nikonov, V.G. Shahov // Izvestiya Samarskogo nauchnogo centra RAN. – 2011. – T. 13. – № 6. – S. 136-141.
7. *Nikonov, V.* A Semi-Lagrangian Godunov-Type Method without Numerical Viscosity for Shocks // Fluids. v. 7. 2022. P. 16. https://doi.org/10.3390/fluids7010016.
8. *Nikonov, V.V.* Matematicheskoe modelirovanie szhimaemyh odnomernyh techenij s pomoshch'yu polulagranzhevogo chislennogo metoda Godunova bez vychislitel'noj vyazkosti dlya udarnyh voln / V. V. Nikonov // Izvestiya Samarskogo nauchnogo centra RAN. 2024. – T. 26. – № 3. – S. 147-163.
9. *Taylor, E.M., Wu, M., Martin, M.P.* Optimization of Nonlinear Error for Weighted Essentially Non-Oscillatory Methods in Direct Numerical Simulations of Compressible Turbulence. // J. Comput. Phys. v. 223. 2007. P. 384-397.
10. *Nikonov, V. V.* Matematicheskoe modelirovanie pogloshcheniya otnositel'no bolee sil'noj udarnoj volnoj bolee slaboj udarnoj volny s pomoshch'yu polulagranzhevogo chislennogo metoda Godunova bez vychislitel'noj vyazkosti dlya udarnyh voln / V. V. Nikonov // Izvestiya Samarskogo nauchnogo centra RAN. – 2024. – T. 26. – № 6. – S. 185–199.
11. *Nikonov, V.* Modified Semi-Lagrangian Godunov-Type Method without Numerical Viscosity for Shocks // Fluids. v. 10. 2025. P. 133. DOI: 10.3390/fluids10050133.
12. *Godunov, S.K.* Chislennoe reshenie mnogomernyh zadach gazovoj dinamiki / S.K. Godunov, A.V. Zabrodin, M.Ya. Ivanov, A.N. Krajko, G.P. Prokopov. M.: Nauka, 1976. 400 s.

Valeriy Nikonov, PhD, Associate Professor of Aircraft Construction and Design Department. E-mail: nikonov.vv@ssau.ru