УДК 517. 93, 517.937

К КОЭФФИЦИЕНТНО-ОПЕРАТОРНЫМ ОБРАТНЫМ ЗАДАЧАМ С КРИТЕРИЕМ МИНИМАЛЬНОЙ ОПЕРАТОРНОЙ НОРМЫ

© 2026 А.В. Банщиков[1], Р.А. Данеев[2], В.А. Русанов[1]

[1] Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова СО РАН, г. Иркутск, Россия
[2] Восточно-Сибирский институт МВД России, г. Иркутск, Россия

Статья поступила в редакцию 06.07.2026

В рамках теории реализации динамических систем (D-систем) получены необходимые и достаточные условия существования дифференциальной реализации нелинейной неавтономной D-системы, заданной пучком траекторных кривых в равномерно выпуклом банаховом пространстве. Коэффициентно-операторное представление дифференциальных уравнений моделируемой D-системы обременено условием, при котором нестационарные операторные коэффициенты уравнений состояния D-системы обладают минимальной операторной нормой.

Ключевые слова: нелинейные неавтономные динамические системы, коэффициентно-операторные обратные задачи дифференциальных уравнений, реализация динамических систем с минимальной операторной нормой.

DOI: 10.37313/1990-5378-2026-28-4-224-237
EDN: JZHYDB

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ (проект: 121041300056-7).

ВВЕДЕНИЕ

Общая теория реализации динамических систем (*D*-систем) изучает [1, гл. 10], [2, гл. III, VIII] проблему апостериорного математического моделирования эволюционных уравнений состояния исследуемой *D*-системы в её наиболее чистом (рафинированном) виде, когда модель уравнений системы рассматривается лишь с точки зрения соответствия некоторому набору экспериментальных данных, характеризующих *D*-систему с точки зрения её внешнего поведения (определение 1.8 [1, с. 20]); при этом подходе все остальные возможные свойства (управляемость, устойчивость и т.п.) *D*-системы остаются в стороне. В данном контексте в [3, 4] были получены аналитические критерии разрешимости задачи моделирования дифференциальной реализации (*D*-реализации) произвольных траекторных пучков управляемых нелинейных динамических процессов в сепарабельном банаховом пространстве, в частности, равномерно выпуклом [5]. В них рассматривались понятия и конструкции теории реализации наиболее общего аналитического вида. Дальнейшая задача заключается в более глубоком конструктивном математическом анализе *D*-реализации, связав её с моделями *D*-систем более конкретными, допускающими непосредственное аналитическое представление. Исходя из этих соображений, вполне оправданно конструировать эти модели, прибегая к вспомогательной постановке оптимального решения коэффициентно-операторной обратной задачи системного анализа на методологической базе выполнения специального математического критерия [6, с. 267] в транскрипции рационального физического контекста. В силу вышеизложенного всюду ниже понятия «*D-система*» и «*D-реализация*» для нас синонимы.

1. ФОРМУЛИРОВКА РАЗРЕШИМОСТИ *D*-РЕАЛИЗАЦИИ С МИНИМАЛЬНОЙ ОПЕРАТОРНОЙ НОРМОЙ

Везде далее символ := означает равенство по определению, $(X,\|\cdot\|_X)$, $(Y,\|\cdot\|_Y)$ и $(Z,\|\cdot\|_Z)$ – вещественные сепарабельные банаховы пространства, $(L(Y,X), \|\cdot\|_{L(Y,X)})$ – банахово пространство с операторной нормой $\|\cdot\|_{L(Y,X)}$ всех линейных непрерывных операторов, действующих из пространства Y в X (аналогично $(L(X,X), \|\cdot\|_{L(X,X)})$ и $(L(Z,X), \|\cdot\|_{L(Z,X)})$), $T:= [t_0, t_1]$ – отрезок числовой прямой R с мерой Лебега μ и ν – положительная мера, абсолютно непрерывная [6, с. 66] относительно μ и определенная на σ-алгебре $\mathfrak{C}_\nu$ всех ν-измеримых (лебеговски пополненных [6, с. 73]) подмножеств из T. Всюду ниже через p, $q\in(1, \infty)$ обозначены [6, с. 145] сопряженные числа $p^{-1} + q^{-1} := 1$.

Банщиков Андрей Валентинович, кандидат физико-математических наук, заведующий отделом динамических свойств и управления сложными объектами в пространстве.
Данеев Роман Алексеевич, кандидат технических наук, доцент кафедры «Информационные технологии».
E-mail: romasun@mail.ru
Русанов Вячеслав Анатольевич, доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник.

Пусть $(B,\|\cdot\|_B)$ – банахово пространство и $r\in[1,\infty)$. Через $L_r(T,\nu,B)$ будем обозначать банахово пространство классов ν-эквивалентности всех интегрируемых по Бохнеру [7, с. 189] отображений f: $T\to B$ с нормой $(\int_T \|f(\tau)\|_B^r\,\nu(d\tau))^{1/r}<\infty$. Как обычно, $C(T,B)$ и $AC(T,B)$ – линейные пространства непрерывных и абсолютно непрерывных (относительно меры μ [7, с. 32]) B-значных функций на T.

Наделим рассматриваемые $(B,\|\cdot\|_B)$-пространства дополнительной структурой:

Определение 1 [7, с. 182]. *Банахово пространство* $(B,\|\cdot\|_B)$ *называют равномерно выпуклым, если каково бы ни было* $\varepsilon>0$, *существует такое* $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, *что из* $\|x\|_B\le 1$, $\|y\|_B\le 1$ *и* $\|x-y\|_B\ge\varepsilon$, $(x,y\in B)$ *следует неравенство*

$$\|x+y\|_B\le 2(1-\delta).$$

Замечание 1. *а)* Есть перефразировка: *банахово пространство* $(B,\|\cdot\|_B)$ *равномерно выпукло, если из* $\|x\|_B\le 1+\varepsilon$, $\|y\|_B\le 1+\varepsilon$, $\|(x+y)/2\|_B>1$ *следует* $\|x-y\|_B\to 0$ *вместе с* $\varepsilon\to 0$.

б) Любое гильбертово пространство $(G,\|\cdot\|_G)$ будет *a fortiori* равномерно выпукло согласно [7, с. 182] характеристической формулы «предгильбертовости»:

$$\|x+y\|_G^2+\|x-y\|_G^2=2(\|x\|_G^2+\|y\|_G^2)\quad\forall x,y\in G.$$

в) Всякое равномерно выпуклое пространство рефлексивно [7, с. 182].

Везде ниже пространства X, Y, Z равномерно выпуклы (в отдельных случаях гильбертовы).

Выделим к рассмотрению квазилинейные дифференциальные модели класса

$$dx(t)/dt=A(t)x(t)+B(t)u(t)+B^{\#}(t)u^{\#}(x(t)),\quad t\in T \tag{1}$$

$$(A(\cdot),B(\cdot),B^{\#}(\cdot))\in L_p(T,\mu,L(X,X))\times L_p(T,\mu,L(Y,X))\times L_p(T,\mu,L(Z,X)),$$

где $x(\cdot)\in AC(T,X)$ – решение Каратеодори (K-решение), $u(\cdot)\in L_q(T,\mu,Y)$ и $u^{\#}(x(\cdot))\in L_q(T,\mu,Z)$ – программное и нелинейное позиционное управления. В целях удобства вектор-функцию $(x,u,u^{\#}(x))$ из (1) тоже будем называть K-решением, а тройку оператор-функций $(A(\cdot),B(\cdot),B^{\#}(\cdot))$, придерживаясь терминологии из [5], назовем коэффициентно-операторной $(A,B,B^{\#})_p$-моделью D-системы (1).

Теперь введем несколько важных для нас математических конструкций. Обозначим через

$$\mathbf{L}_p:=L_p(T,\mu,L(X,X))\times L_p(T,\mu,L(Y,X))\times L_p(T,\mu,L(Z,X))$$

банахово пространство классов μ-эквивалентности всех $(A,B,B^{\#})_p$-моделей (упорядоченных троек оператор-функций из уравнений (1)) с нормой

$$\|(A(\cdot),B(\cdot),B^{\#}(\cdot))\|_{\mathbf{L}}:=$$

$$=(\int_T(\|A(\tau)\|_{L(X,X)}^p+\|B(\tau)\|_{L(Y,X)}^p+\|B^{\#}(\tau)\|_{L(Z,X)}^p)\mu(d\tau))^{1/p}.$$

Через $(H_q,\|\cdot\|_H)$ обозначим нормированное функциональное пространство-произведение вида:

$$H_q:=L_q(T,\mu,X)\times L_q(T,\mu,Y)\times L_q(T,\mu,Z),$$

$$\|(g,w,v)\|_H:=(\int_T(\|g(\tau)\|_X^q+\|w(\tau)\|_Y^q+\|v(\tau)\|_Z^q)\mu(d\tau))^{1/q},\quad(g,w,v)\in H_q,$$

которое, как полное в силу конструкции нормы $\|\cdot\|_H$, является банаховым. Далее, через $(L(H_q,X),\|\cdot\|_{L(H,X)})$ обозначим банахово пространство с операторной нормой всех линейных непрерывных операторов, действующих из пространства H_q в X.

Пусть $(A(\cdot),B(\cdot),B^{\#}(\cdot))\in\mathbf{L}_p$. Рассмотрим оператор ξ: $H_q\to X$, имеющий представление:

$$\xi(g,w,v):=\int_T(A(\tau)g(\tau)+B(\tau)w(\tau)+B^{\#}(\tau)v(\tau))\mu(d\tau),\quad(g,w,v)\in H_q; \tag{2}$$

ясно, что $\xi\in L(H_q,X)$ (в соответствии с терминологией [5] интегральный оператор (2) – ξ_q-модель). Для обратного утверждения «$\zeta\in L(H_q,X)\Rightarrow$ *оператор* ζ *имеет аналитическое представление* (2)», требуются *mutatis mutandis* уточнения и рассуждения (см. лемму 2 [5]).

В задачах апостериорного математического моделирования эволюционных уравнений нелинейной динамики сложных динамических процессов понимание физической природы исследуемой D-системы, представленной процессами «*вход-выход*», не всегда достаточно для определения структуры её математической модели; например, допустима ли линеаризация уравнений D-реализации на основе формального анализа полученных экспериментальных данных. В такой постановке возникает следующий методологический вопрос: *какой из математических структур D-реализации следует отдать предпочтение при имеющихся входных и выходных данных*? На самом деле, в большинстве практических случаев, ответ на означенный вопрос должен быть одним из первых шагов в построении математической модели уравнений D-системы. Следуя этой парадигме, началом в исследовании дифференци-

альной реализации *D*-системы часто служит следующая коэффициентно-операторная обратная задача системного анализа [3–5].

Постановка разрешимости задачи D-реализации нелинейных динамических процессов:[1] пусть

$$u^{\#}(\cdot)\colon AC(T,X)\to \mathrm{L}_q(T,\mu,Z),\ q\in(1,\infty),$$
$$N\subset\mathbf{\Pi}:=\{(x,u,v)\in AC(T,X)\times \mathrm{L}_q(T,\mu,Y)\times \tag{3}$$
$$\times \mathrm{L}_q(T,\mu,Z)\colon (x,u,v)=(x,u,u^{\#}(x))\},$$

где N – фиксированное поведение типа «*вход–выход*» моделируемой *D*-системы с нелинейным позиционным управлением $x\mapsto u^{\#}(x)$, структура которого задана *a priori*. Необходимо определить характеристические условия, при которых нелокальный динамический пучок N представляет K-решения некоторого дифференциального уравнения (1); ограничений на Card N (мощность траекторного пучка N) не накладываем, например, допустимо, когда Card $N\geq \aleph_0$ ($\aleph_0$ – алеф нуль).

Постановки D-реализации с минимальной операторной нормой. При построении *D*-реализации семейства динамических процессов (3), как правило, даже для конечномерных систем (2), имеем дело не с одной системой дифференциальных уравнений (2), а с целым семейством систем [10], что выдвигает задачу построения *оптимальной D*-реализации по некоторым формальным критериям (речь не идет о *минимальных* реализациях типа [2, гл. VIII] или [11, 12]). Данные постановки допускают несколько математических трактовок. Можно исходить из решения задачи дифференциальной реализации в структуре пространства $L(H_q,X)$ по критерию *минимальной нормы* $\|\cdot\|_{L(H,X)}$ (раздел 3), или в структуре пространства $\mathbf{L}_p$ по критерию *минимальной нормы* $\|\cdot\|_{\mathrm{L}}$ (раздел 5).

Начнем наши изыскания с задачи существования *D*-реализации с *минимальной операторной нормой* в $(L(H_q,X),\|\cdot\|_{L(H,X)})$. Переходя к деталям, заметим, что банахово пространство X по геометрии локально выпукло, следовательно, т.к. пространство, сопряженное к X, разделяет на X точки, то линейный непрерывный оператор $\Gamma\colon \mathbf{L}_p\to L(H_q,X)$, осуществляющий согласно (2) соответствие

$$\Gamma(A(\cdot),B(\cdot),B^{\#}(\cdot)):=\xi,$$

представляет линейный гомеоморфизм *ipso facto* (лемма 2 [5]) между линейными множествами всех $(A,B,B^{\#})_p$- и ξ_q-моделями (дифференциальными и интегральными моделями); при этом данные $(A,B,B^{\#})_p$- и ξ_q-модели ($p^{-1}+q^{-1}=1$) будем называть *Γ-изоморфными* [13, с. 124]. Уместно отметить, что хотя эквивалентная норма $\|\cdot\|^*$ на X ($\alpha_1\|\cdot\|_X\leq\|\cdot\|^*\leq\alpha_2\|\cdot\|_X$, $\alpha_1,\alpha_2>0\in R$ [13, с. 124]) не определена однозначно, но тоже обеспечивает изоморфизм пространств $(A,B,B^{\#})_p$- и ξ_q-моделей для $(\mathbf{L}_p,\|\cdot\|_{\mathrm{L}})$ и $(L(H_q,X),\|\cdot\|_{L(H,X)})$; как правило, обычно в каждом случае для рассматриваемого изоморфизма существует естественный (прагматический) выбор нормы $\|\cdot\|^*$, и он может быть по-своему хорош, по крайней мере, практически оправдан в некоторой физической интерпретации.

Определение 2. *D-реализацию пучка N динамических процессов* (3), *обладающую* ξ_q*-моделью* $\xi_{\min}\in L(H_q,X)$, *для которой при* $(X,\|\cdot\|^*)$ *имеет место*

$$\|\xi_{\min}\|_{L(H,X)}=\min\{\|\xi\|_{L(H,X)}\colon \xi - \textit{оператор (2) для D-системы (1) с K-решениями } N\},$$

назовем D-реализацией, минимальной по критерию операторной нормы $\|\cdot\|_{L(H,X)}$, *при этом соответствующую* $(A,B,B^{\#})_p$*-модель* $\Gamma^{-1}(\xi_{\min})$ *назовем* $\|\cdot\|_{L(H,X)}$*-минимальной.*

Стоит подчеркнуть, что можно провести четкую физическую границу между минимизацией по критерию нормы $\|\cdot\|_{L(H,X)}$ или по критерию нормы $\|\cdot\|_{\mathrm{L}}$; несомненно, при желании здесь тоже можно найти новые темы для плодотворного физико-математического исследования.

2. РАСШИРЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ С СОХРАНЕНИЕМ НЕПРЕРЫВНОСТИ И НОРМЫ

Все выдающиеся достижения математического моделирования связаны с тем, что оно позволяет абстрагировать определенные свойства наблюдаемых объектов и наблюдаемых отношений между ними и чисто логическим путем выводить новые свойства и новые отношения, которые можно затем проверить экспериментом. При этом в самой математике новая теория обычно начинается с того, что постулиру-

[1] Означенная постановка дифференциальной реализации *D*-системы не исключают методологического положения, когда закон $x\to u^{\#}(x)$ детерминируется не по принципу «*state feedback*», а характеризует существенную «нелинейную компоненту» в уравнениях динамики (1), моделируемых *a posteriori* [12], в том числе опираясь (и развивая) на результаты теории реализации для систем высших порядков [8, 9, 15].

ется ряд новых математических свойств. Как скоро убедимся, вопрос о существовании $\xi_{\min}$-модели для N решается в зависимости не только от аналитической структуры динамического пучка N, но и от метрических структур пространств «*входных*» – H_q и «*выходных*» – X сигналов пространства операторно-интегральных ξ_q-моделей из $L(H_q,X)$.

Определение 3 [13, с. 246][2]. *Система множеств называется сцепленной, если каждая пара множеств этой системы имеет непустое пересечение, при этом линейное пространство* x *есть пространство структуры* $\mathfrak{R}$, *если* $(x,\|\cdot\|_{\mathfrak{R}})$ *является нормированным пространством, каждое сцепленное семейство замкнутых шаров которого имеет непустое пересечение.*

Заметим [13, с. 246], что всякое нормированное пространство x типа $\mathfrak{R}$ – банахово. Действительно пусть $\{x_n\}$ – сходящаяся в себе последовательность элементов пространства x. Обозначим через r_n значение $\sup\{\|x_m-x_n\|_{\mathfrak{R}}: m\geq n\}$ и рассмотрим семейство $\{Sr_n(x_n)\}_{n=1,2,\ldots}$ замкнутых шаров радиусов r_n с центрами в x_n. Это сцепленное семейство, поскольку при $m>n$ будет $\|x_m-x_n\|_{\mathfrak{R}}\leq r_n$ и, следовательно, имеет место $x_n\in Sr_n(x_n)\cap Sr_m(x_m)$. Если x – пространство типа $\mathfrak{R}$, то существует элемент $x\in$ x, входящий в каждый из шаров $Sr_n(x_n)$, т.е. имеем

$$\|x-x_n\|_{\mathfrak{R}}\leq r_n \quad (n=1,2,\ldots)$$

и поскольку $r_n\to 0$, то будет $x_n\to x$. Тем самым полнота пространства x установлена.

Следующие два предложения установлены Нахбиным [14].

Предложение 1.[3] *Пусть* $(H,\|\cdot\|_H)$ *– нормированное пространство и* $\Omega^{\#}$ *– линейное множество, содержащееся в* H. *Пусть, далее,* $\xi^{\#}$ *– линейный непрерывный оператор, отображающий* $\Omega^{\#}$ *в пространство* $(x,\|\cdot\|_{\mathfrak{R}})$ *типа* $\mathfrak{R}$. *Тогда существует линейное непрерывное распространение* ξ^{+} *оператора* $\xi^{\#}$, *отображающее пространство* H *в пространство* x, *причём выполняется*

$$\|\xi^{+}\|_{L(H,X)}=\|\xi^{\#}\|_{L(\Omega^{\#},X)}.$$

Условие распространения линейного оператора с сохранением операторной нормы, сформулированное в предложении 1, является так же и необходимым (см. предложение 2), для установления этого свойства нам понадобятся некоторые приготовления, скомпонованные в лемме 1.

Лемма 1.[4] *Пусть* S *– бесконечное множество и* $l^{\infty}(S)$ *– семейство всех заданных на* S *вещественных ограниченных функций. Тогда, если для любых функций* f', $f''\in l^{\infty}(S)$ *положить*

$$\|f',f''\|_{\infty}:=\sup\{|f'(s)-f''(s)|: s\in S\}, \qquad (4)$$

то $(l^{\infty}(S),\|\cdot\|_{\infty})$ *– банахово пространство типа* $\mathfrak{R}$.

Предложение 2. *Банахово пространство* $(x,\|\cdot\|_X)$ *будет типа* $\mathfrak{R}$, *если какое бы банахово пространство* $(H,\|\cdot\|_H)$ *ни взять, всякий непрерывный линейный оператор, отображающий произвольное подпространство из* H *в* x, *допускает линейное непрерывное распространение с сохранением операторной нормы на всё* H.

Замечание 2. Установлено (детали см. в [14]), что банахово пространство обладает типом $\mathfrak{R}$ в том и только в том случае, если оно линейно изометрично банахову пространству $C(Q)$, где Q – экстремально несвязный компакт; напомним, компакт Q называется *экстремально несвязным*, если замыкание всякого открытого множества из Q открыто-замкнуто [13, с. 366].

Для описанной выше конструкции аналитического решения задачи расширения линейного непрерывного оператора, сохраняющего норму, существует двойственный процесс (предложение 3), который установил и развил Какутани [16].

---

[2] Простейшим примером пространства типа $\mathfrak{R}$ является вещественная числовая прямая. Действительно, замкнутый шар в этом пространстве представляет собой замкнутый промежуток. Рассмотрим поэтому сцепленное множество $\{[a_\alpha,b_\alpha]\}$ $(\alpha\in A)$ замкнутых промежутков и проверим, что это множество имеет непустое пересечение. Фиксируем для этого некоторое $\alpha^*\in A$. Поскольку промежутки $[a_\alpha,b_\alpha]$ и $[a_{\alpha^*},b_{\alpha^*}]$ имеют общие точки, каково бы ни было $\alpha\in A$, то $a_{\alpha^*}\leq b_\alpha$ $(\alpha\in A)$. Следовательно, $a_{\alpha^*}\leq\inf\{b_\alpha: \alpha\in A\}$. А так как $\alpha^*\in A$ произвольно, то отсюда $a_*=\sup\{a_\alpha: \alpha\in A\}\leq \inf\{b_\alpha: \alpha\in A\}=b^*$. Таким образом, любая точка промежутка $[a_*,b^*]$ входит в каждый из промежутков $[a_\alpha,b_\alpha]$, что в конечном итоге и доказывает исходное утверждение.

[3] Необходимость введения в рассмотрение пространств структуры $\mathfrak{R}$ обусловлена тем, что аналитический аппарат $\xi_{\min}$-моделей можно строить в рамках теории о распространении линейного оператора с сохранением его нормы [14], как плодотворного аналога классической теоремы Хана–Банаха.

[4] Не трудно показать (теорема I.2.19 [6, с. 35]), что $L^{\infty}(S)$ с нормой (4) – суть полное метрическое пространство, сходимость в котором означает равномерную $\|\cdot\|_{\infty}$-сходимость соответствующей последовательности функций.

Предложение 3. *Пусть* $(\mathrm{H},\|\cdot\|_{\mathrm{H}})$ *– нормированное пространство, E – произвольное линейное множество в* H, *X – произвольное банахово пространство и пусть* $\xi_: E\to X$ *– линейный непрерывный оператор. Тогда, чтобы существовал линейный непрерывный оператор* ξ^{+} *такой, что*

$$\xi^{+}: \mathrm{H}\to X,\ \xi^{+}\supset\xi_,$$
$$\|\xi^{+}\|_{L(\mathrm{H},X)}=\|\xi_\|_{L(E,X)},$$

необходимо и достаточно, чтобы H *по структуре было предгильбертово, т.е.*

$$\|x+y\|_{\mathrm{H}}^2+\|x-y\|_{\mathrm{H}}^2=2(\|x\|_{\mathrm{H}}^2+\|y\|_{\mathrm{H}}^2)\ \ \forall x,y\in\mathrm{H}.$$

Предложения 1–3 составляют «краеугольные камни» геометрического фундамента в решении задачи дифференциальной реализацией оптимальной по критерию операторной нормы $\|\cdot\|_{L(H,X)}$. Правда остается открытым вопрос:[5] как согласуется структура *бесконечномерного сепарабельного* банахова равномерного выпуклого пространства с геометрией пространство типа $\Re$? Какой в такой постановке можно получить результат, показывает следующая лемма.

Лемма 2. *Пусть* $(X,\|\cdot\|_X)$ *– сепарабельное банахово равномерно выпуклое пространство. Тогда найдется такое множество S, что X – замкнутое подпространство в* $(\mathrm{l}^{\infty}(S),\|\cdot\|_{\infty})$*, при этом норма* $\|\cdot\|_X$ *– сужение на X нормы* $\|\cdot\|_{\infty}$.

Замечание 3. В разделах 3, 4 ограничимся рассмотрением локально-компактных $\mathrm{l}^{\infty}(S)$, поэтому не будем глубже вдаваться в вопросы сепарабельности подпространств в $\mathrm{l}^{\infty}(S)$.

3. К СУЩЕСТВОВАНИЮ *D*-РЕАЛИЗАЦИИ ОБЛАДАЮЩЕЙ $\xi_{\min}$-МОДЕЛЬЮ

Одна из целей этого раздела – выявить связь теории дифференциальной реализации и теории расширения операторов, которая обогащает каждый из этих разделов математического моделирования возможностью интерпретации в другом разделе. Такая взаимосвязь между различными разделами теории математического моделирования ломает зачастую искусственное её деление на различные предметные области и подчеркивает существенное единство этой теории.

Ниже понадобятся некоторые дополнительные конструкции. Обозначим через $\mathrm{L}(T,\mu,R)$ пространство классов μ-эквивалентности всех вещественных μ-измеримых на T функций и пусть $\le_{\mathrm{L}}$ – квазиупорядочение в $\mathrm{L}(T,\mu,R)$ такое, что $\phi_1\le_{\mathrm{L}}\phi_2$, когда $\phi_1,\phi_2\in\mathrm{L}(T,\mu,R)$ и при этом $\phi_1(t)\le\phi_2(t)$ μ-почти всюду в T. Наименьшую верхнюю грань для подмножества $W\subset\mathrm{L}(T,\mu,R)$ обозначим $\sup_{\mathrm{L}}W$, если она существует для W в структуре частичного упорядочения $\le_{\mathrm{L}}$. Далее, примем $U:=X\times Y\times Z$ и введем *оператор Релея–Ритца* Ψ: $\mathbf{\Pi}\to\mathrm{L}(T,\mu,R)$, построенный согласно «*поточечного правила*» на временном промежутке T (для конечномерного U данная конструкция была впервые рассмотрена в статьях [17, 18], при этом постановка [18] дана в энтропийной трактовке):

$$\Psi(g,w,v)(t):=\begin{cases}\|dg(t)/dt\|_X/(\|(g(t)\|_X^q+\|w(t)\|_Y^q+\|v(t))\|_Z^q)^{-1/q}, & \text{если } (g(t),w(t),v(t))\ne 0\in U;\\ 0\in R, & \text{если } (g(t),w(t),v(t))=0\in U;\end{cases}\tag{5}$$

корректность оператора Ψ определяется теоремой 2 [7, с. 182] и теоремой 2.1 [19, с. 16]; данные теоремы обеспечивают существование $dg(\cdot)/dt$. Везде далее $\mathrm{Fr}(\cdot)$ – граничный оператор [20, с. 51] на семействе подмножества некоторого (фиксированного) топологического пространства. Также примем, что ниже $\mathrm{Sp}(N)$ – линейная оболочка [6, с. 37] множества динамических процессов (3).

Структурные предположения о сепарабельности и равномерной выпуклость пространств X, Y, Z недостаточны для доказательства общей теоремы, дающей необходимые и достаточные условия разрешимости D-реализации, минимальной по критерию операторной нормы $\|\cdot\|_{L(H,X)}$. Поэтому, прежде всего, естественно поинтересоваться (в контексте определений 2, 3), когда *все* нормы в пространстве выходных сигналов $(X,\|\cdot\|_X)$ эквивалентны $(X,\|\cdot\|_{\Re})$? Так, например, можно спросить: какова при этом будет характеристика топологии пространства X, или (с учетом замечания 2) структура пространства $C(Q)$? Поскольку пространство X должно быть *нормируемо*, то оно, как минимум, должно быть *локально выпукло*, что ниже предполагается по умолчанию. Теорема 2 [13, с. 127] дает ответ на означенные вопросы, а именно: топология в X должна быть *локально компактной* (!), что равносильно выполнению условия

[5] Не трудно показать (см. § 4.6 [13, с. 40]), что любое *бесконечномерное* пространство $\mathbb{L}^{\infty}(S)$ с метрикой (4) всегда (!) *несепарабельное*.

Card $Q < \infty$ (при этом в геометрической структуре пространства входных сигналов H_q пространство $(X,\|\cdot\|_X)$ вовсе *не обязано* быть типа $\mathfrak{R}$).

Теорема 1. *Пусть* $N\subset\mathbf{\Pi}$ *при этом линейная оболочка* $\mathrm{Sp}(N)$ *наделена топологией индуцированной из пространства* H_q, Fr – *граничный оператор в* $\mathrm{Sp}(N)$, Θ – *ограниченная выпуклая окрестность нуля в* $\mathrm{Sp}(N)$ *и пусть пространство X локально компактное. Тогда D-реализация для N обладает* $\xi_{\min}$*-моделью при* $(X,\|\cdot\|_{\mathfrak{R}})$ *в том и только в том случае, если имеет место*

$$\exists\varphi\in \mathrm{L}_p(T,\mu,R),\ 0\le_{\mathrm{L}}\varphi:\ \sup_{\mathrm{L}}\Psi(\mathrm{Fr}(\Theta))=\varphi.$$

Замечание 4. Выпуклость окрестности Θ не носит принципиальный характер (можно опустить), она лишь упрощает технические детали доказательства теоремы, исключая потенциально-возможные «патологии» геометрической структуры множества Θ как «произвольной» окрестности нуля в линейном многообразии $\mathrm{Sp}(N)$.

Доказательство теоремы. Необходимость следует из теоремы 2 [5], докажем справедливость достаточных условий. С этой целью рассмотрим множество $\Omega^{\#}:=\{\omega\in H_q:\ \exists T_r\subset T,\ \exists(g,w,v)\in\ \Theta,\ \omega=\chi_{Tr}\cdot(g,w,v)\}$, где χ_{Tr} – характеристическая функция подинтервала $T_r=[t_0,t_r]\subset T$, $t_0\le t_r$. Условимся, что линейное множество $\Omega^{\#}$ наделено топологической структурой, индуцированной из пространства H_q. В такой постановке, как показано в теоретико-множественной интерпретации [21], формальный идентификационный процесс (I-процесс [22]), организованный на I-базисе $\Omega^{\#}$, определяет в силу теоремы 2 [23] единственную идентифицируемую ξ_p-модель в идентификационном пространстве $(L(\Omega^{\#},X),\Im_{\Omega})$ (здесь $\Im_{\Omega}$ – I-классификация на $L(\Omega^{\#},X)$, имеющая I-базисе $\Omega^{\#}$ [22, 23]), оператор которой обозначим через $\xi^{\#}$. Так как пространство выходных сигналов $(X,\|\cdot\|_{\mathfrak{R}})$ является $\mathfrak{R}$-пространством, то оператор $\xi^{\#}$ в силу предложения 1 можно линейно с сохранением нормы распространить на H_q. Пусть ξ^{+} – такое распространение. Очевидно, что $(A,B,B^{\#})_p$-модель $\Gamma^{-1}(\xi^{+})$ (её существование гарантировано леммой 2 [5]) будет $(A,B,B^{\#})_p$-моделью в дифференциальной реализации N. Покажем, что оператор ξ^{+} отвечает прочим условиям $\xi_{\min}$-модели (по отношению к семейству нелокальных процессов N). Допустим, что в семействе $(A,B,B^{\#})_p$-моделей для множества процессов N существует такая модель, что для её Γ-образа ξ^{*} справедливо

$$\|\xi^{*}\|_{L(H,X)}<\|\xi^{+}\|_{L(H,X)}=\|\xi^{\#}\|_{L(\Omega^{\#},X)}.$$

Но в этом случае будет

$$\|\xi^{*}|\Omega^{\#}\|_{L(\Omega^{\#},X)}\le\|\xi^{*}\|_{L(H,X)};$$

тем самым пришли к противоречию, поскольку имеет место $\xi^{*}|\Omega^{\#}=\xi^{\#}$. □

К существованию $\xi_{\min}$-модели можно подойти с иной позиции, нежели представленной теоремой 1. С этой целью в доказательстве заменим предложение 1 предложением 3, которое характеризует H_q в условиях, когда X – произвольное равномерно выпуклое пространство; данная характеризация определяет H_q при $q=2$ как *унитарное пространство* (когда X, Y, Z суть гильбертовы), поэтому ответ на такую методологическую постановку ниже даёт:

Теорема 2. *Пусть* $N\subset\mathbf{\Pi}$ *и в* $L(H_2,X)$ *пространство X равномерно выпукло (но не обязательно гильбертово). Тогда для D-реализации N существует* $\xi_{\min}$*-модель в* $L(H_2,X)$*, если* H_2 *– гильбертово пространство (т.е. X, Y, Z – суть гильбертовы).*

Как и следовало ожидать, вариант, когда пространство входных сигналов H_2 гильбертово, а выходных сигналов X типа $\mathfrak{R}$ обладает дополнительными преимуществами при построении $\xi_{\min}$-модели; присвоим такой $\xi_{\min}$-модели структуру $H_2\mathfrak{R}$ (или, равнозначно, $H_2\mathfrak{R}$-$\xi_{\min}$-модель). Это особенно проявляется в том случае, когда множество N суть *одноэлементное*. Поэтому в оставшейся части будем считать, что Card N =1 (вполне частый практический случай) и

$$H_2:=\mathrm{L}_2(T,\mu,R^n)\times\mathrm{L}_2(T,\mu,R^m)\times\mathrm{L}_2(T,\mu,R^k),$$

где R^n, R^m и R^k – евклидовы пространства, а R^n в $L(H_2,R^n)$ имеет норму $\|x\|_{\max,R}n=\max\{|x_i|:\ 1\le i\le n\}$, $\mathrm{col}(x_1,\ldots,x_n)=x$ и $N^{*}:=\{(x^{*},u^{*},u^{\#}(x^{*}))\}$, где $(x^{*},u^{*},u^{\#}(x^{*}))$ – фиксированная тройка вектор-функций из $\mathbf{\Pi}\subset H_2$. При этом дополнительно предполагаем, что N^{*} имеет реализацию (1); все возможные затруднения снимаются, как только замечаем, что характеризация этого положения (в силу теоремы 1) является $\Psi(N^{*})\in\mathrm{L}_2(T,\mu,R)$, где Ψ – оператор Релея–Ритца (5). Далее, условимся, что $\omega^{*}:=\mathrm{col}(x^{*},u^{*},u^{\#}(x^{*}))$ и $\omega^{*}_{d}:=(<\omega^{*},\omega^{*}>_R n+m+k)^{-1}\mathrm{col}(dx^{*}_1/dt,\ldots,dx^{*}_n/dt)$, где $<\cdot,\cdot>_R n+m+k$ – операция скалярного произведения в пространстве R^{n+m+k}, dx^{*}_i/dt – i-ый элемент вектора dx^{*}/dt.

Доказательство следующей теоремы прозрачно в силу следствия 5 [24][6].

[6] Формула (6) – очевидная конкретизация общей конструкции (6) [24].

Теорема 3. *Для N^* существует $H_2\Re$-$\xi_{\min}$-модель с Г-изоморфной $||\cdot||_{L(H,X)}$-минимальной $(A,B,B^{\#})_2$-моделью $(A(\cdot),B(\cdot),B^{\#}(\cdot))\in \mathbf{L}_2$, у которой аналитическое представление имеет вид*:

$$[A^*(t),B^*(t),B^{*\#}(t)]=\omega^*_d(t)[\omega^*(t)]', \tag{6}$$

при этом норма $H_2\Re$-$\xi_{\min}$-модели равна $\max_{1\le i\le n}(\int_T \omega^{*2}_{d_i}(t)\mu(dt))^{1/2}$, *где* $\omega^*_{d_i}$ *– i-ая координата вектор-функции* ω^*_d, $[\cdot]'$ *– операция транспонирования матрицы.*

Теоремы 1–3 не отвечают на важный вопрос: имеет ли задача построения $H_2\Re$-$\xi_{\min}$-модели *единственное* решение? Следующее утверждение даёт удивительно простой (и одновременно конструктивный) ответ на поставленный вопрос.

Теорема 4. $\xi_{\min}$*-модель для D-реализации N^* в структуре $H_2\Re$ единственна в том и только в том случае, если* $\min_{1\le i\le n}(\int_T \omega^{*2}_{d_i}(t)\mu(dt))^{1/2}=\max_{1\le i\le n}(\int_T \omega^{*2}_{d_i}(t)\mu(dt))^{1/2}$.

Пример 1. В предположении нарушенного условия (min...=max...) теоремы 4, построим $(A,B,B^{\#})_2$-модель, *Г*-изоморфную некоторой $H_2\Re$-$\xi_{\min}$-модели и не равную $(A^*(\cdot),B^*(\cdot),B^{*\#}(\cdot))$.

Пусть $\min_{1\le i\le n}(\int_T \omega^{*2}_{d_i}(t)\mu(dt))^{1/2}\ne\max_{1\le i\le n}(\int_T \omega^{*2}_{d_i}(t)\mu(dt))^{1/2}$. Тогда найдётся индекс j, для которого $(\int_T \omega^{*2}_{d_j}(t)\mu(dt))^{1/2}\ne\max_{1\le i\le n}(\int_T \omega^{*2}_{d_i}(t)\mu(dt))^{1/2}$. Далее пусть число α таково, что $(\int_T \omega^{*2}_{d_j}(t)\mu(dt))^{1/2}\le\alpha<\max_{1\le i\le n}(\int_T \omega^{*2}_{d_i}(t)\mu(dt))^{1/2}$. Тогда любая функция $s^*(\cdot)\in H_2$ такая, что $\mathrm{supp}(\omega^*)\subset\mathrm{supp}(s^*)$ (mod μ) [13, с. 137], $dx^*_j(t)/dt=\langle s^*(t),\omega^*(t)\rangle_R n+m+k$ и $(\int_T\langle s^*(t),s^*(t)\rangle_R n+m+k\mu(dt))^{1/2}=\alpha$, может заменить в качестве j-ой строки в матрице (6) $\omega^*_d[\omega^*]'$ её j-тую (исходную) строку без потери у полученной таким образом $(A,B,B^{\#})_2$-модели свойства быть *Г*-изоморфной некоторой $H_2\Re$-$\xi_{\min}$-модели множества N^*; например, конструкция $s^*=s^*_j+s$, где s^*_j *– j*-ая строка матрицы $\omega^*_d[\omega^*]'$ и s – любая вектор-функция из ортогонального дополнения $\Omega^*_{\perp}$ [13, с. 165] к максимальному I-базису Ω^*, индуцированному процессом ω^*, удовлетворяет всем выдвинутым к функции s^* требованиям.

Поскольку при $\min_{1\le i\le n}(\int_T \omega^{*2}_{d_i}(t)\mu(dt))^{1/2}\ne\max_{1\le i\le n}(\int_T \omega^{*2}_{d_i}(t)\mu(dt))^{1/2}$ $(A,B,B^{\#})_2$-модель, осуществляющая роль *D*-реализации (1) для процесса N^* с $H_2\Re$-$\xi_{\min}$-моделью, не обладает свойством единственности (см. пример 1), то процедуру её построения естественно усилить дополнительным требованием о минимальности нормы этой $(A,B,B^{\#})_2$-модели, как элемента пространства $\mathbf{L}_2$, что составит предмет рассмотрений следующего раздела. При этом понимание природы *D*-системы (в техническом смысле) будет способствовать прояснению и мотивировке всего обсуждения.

4. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ *D*-РЕАЛИЗАЦИИ С МИНИМАЛЬНОЙ $||\cdot||_{L(H,X)}$-НОРМОЙ

Операторная норма $H_2\Re$-$\xi_{\min}$-модели для *D*-реализации N^* из раздела 3, в силу своей конструкции равна $\max_{1\le i\le n}(\int_T\langle s^*_i(t),s^*_i(t)\rangle_R n+m+k\mu(dt))^{1/2}$, где s^*_i *– i*-ая строка *Г*-изоморфной для неё $(A, B, B^{\#})_2$-модели. Таким образом, целесообразно рассматривать вектор-функции s^*_i, $1\le i\le n$, как элементы гильбертова пространства $H_2=L_2(T,\mu,R^n)\times L_2(T,\mu,R^m)\times L_2(T,\mu,R^k)$. Сделаем этот факт ключом к решению задачи *конструирования* $H_2\Re$-$\xi_{\min}$-модели в рамках Фурье-анализа.

Пусть для каждого индекса $i=1,\ldots,n$ выделены: G_i – бесконечномерное подпространство пространства H_2, $\{\varphi_{ij}\}_{j=1,2,\ldots}$ – некоторая полная ортогональная система в G_i и $s'_i\in G_i$ *– i*-ая объединённая (совместная) вектор-строка некоторой фиксированной нестационарной $(A,B,B^{\#})_2$-модели $(A'(\cdot),B'(\cdot),B'^{\#}(\cdot))\in\mathbf{L}_2$. Тогда, из $s'_i\in G_i$, $i=1,\ldots,n$ следует, что для тройки матричных функций $(A'(\cdot), B'(\cdot),B'^{\#}(\cdot))$ корректно её аналитическое представление в структуре пространства $L_2(T,\mu,L(R^{n+m+k}, R^n))$ (через ряды Фурье в гильбертовом пространстве H_2) следующего вида:

$$\begin{matrix}\lceil\Sigma_{j=1,2,\ldots}c_{1j}\varphi_{1j}\rceil\\ [A'(\cdot),B'(\cdot),B'^{\#}(\cdot)]=\vert\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\vert,\ c_{ij}\in R,\ \varphi_{ij}\in G_i,\\ \lfloor\Sigma_{j=1,2,\ldots}c_{nj}\varphi_{nj}\rfloor\end{matrix} \tag{7}$$

при этом [25, с. 411] для каждой вектор-строки $s'_i(\cdot)$ $(1\le i\le n)$ матрицы $[A'(\cdot),B'(\cdot),B'^{\#}(\cdot)]$ при $g\to\infty$ μ-почти всюду на T будет выполняться поточечная сходимость:

$$\Sigma_{j=1,\ldots,g}c_{ij}\varphi_{ij}(t)\xrightarrow[g\to]{}s'_i(t). \tag{8}$$

В такой постановке упорядоченную тройку $(\{G_i\}_{1\le i\le n},\{\varphi_{ij}\}_{1\le i\le n,\ j=1,2,\ldots},(A'(\cdot),B'(\cdot),B'^{\#}(\cdot)))$ будем называть[7] *сигнатурой «спектрально-векторной» идентификации* (сигнатурой СВИ) нестационарной $(A,B,B^{\#})_2$-модели $(A'(\cdot),B'(\cdot),B'^{\#}(\cdot))$ *D*-системы (1). Отметим, что введение в рассмотрение процедуры СВИ методологически оправдано тем, что задача *конструирования* динамического объекта (1), как правило, решается в условиях, когда *a priori* нет «прямых указаний» на вид аналитического представления (моделирования) нестационарных параметров $(A,B,B^{\#})_2$-модели.

Основное свойство, характеризующее понятие сигнатуры СВИ как элемента формализации общей постановки задачи СВИ, свяжем с конструкцией семейства процессов $P\subset\mathbf{\Pi}$, имеющего *D*-реализацию (1) и порождающего I-базис, модель которого допускает построение вида (7).

Определение 4. *Пусть* $P\subset\mathbf{\Pi}\subset H_2$, $(\{G_i\}_{1\le i\le n},\{\varphi_{ij}\}_{1\le i\le n,\ j=1,2,\ldots},(A'(\cdot),B'(\cdot),B'^{\#}(\cdot)))$ *некоторые семейство динамических процессов и сигнатура СВИ. В этом случае будем говорить, что семейство P и сигнатура* $(\{G_i\}_{1\le i\le n},\{\varphi_{ij}\}_{1\le i\le n,\ j=1,2,\ldots},(A'(\cdot),B'(\cdot),B'^{\#}(\cdot)))$ *находятся в двойственности, если выполнены оба следующих условия*[8]:

а) множество P удовлетворяет классу допустимых K-решений дифференциальной системы (1) *с* $(A,B,B^{\#})_2$*-моделью равной* $(A'(\cdot),B'(\cdot),B'^{\#}(\cdot))$;

б) в пространстве входных сигналов H_2 *существует такой* I*-базис, индуцированный множеством P, что для* $\forall i=1,\ldots,n$ *этот* I*-базис разделяет точки в* G_i.

Через 2^N обозначим семейство всех подмножеств множества динамических процессов $N\subset\mathbf{\Pi}\subset H_2$; по существу элементы из 2^N – «потенциальные кандидаты» для I-процесса, призванные *a posteriori* определить структурный «фенотип» третьей компоненты сигнатуры СВИ.

Определение 5. *Задача СВИ* $(A,B,B^{\#})_2$*-модели в* (1) *частично решена (аналогично, вполне решена) над множеством динамических процессов* $N\subset\mathbf{\Pi}\subset H_2$*, если одновременно*:

а) в 2^N *выделено непустое максимальное множество P, для которого существует реализация в виде некоторой дифференциальной системы* (1) *(соответственно показано, что N – K-решения некоторой дифференциальной системы* (1)*)*;

б) определена сигнатура СВИ, двойственная P из а) (аналогично, двойственная N) такая, что в этой сигнатуре для тройки матричных функций $(A'(\cdot),B'(\cdot),B'^{\#}(\cdot))$ *и любой пары индексов* (i,j), $1\le i\le n$, $j=1,2,\ldots$ *возможно тем или иным способом вычисление коэффициента* c_{ij} *из* (7).

Замечание 5. Вводя в обращение понятия *частичной* и *вполне* разрешимости задачи спектрально-векторной идентификации, пунктом *а)* обеспечиваем её решение для $(A,B,B^{\#})_2$-моделей, тогда как *б)* гарантирует единственность этого решения с точностью до сигнатуры СВИ.

Определение 5 позволяет формально истолковывать задачу СВИ как некое «правило» или, если угодно, «закон соответствия», которое каждому заданному множеству наблюдаемых динамических процессов класса $\mathbf{\Pi}\subset H_2$ сопоставляет предельные пары «*максимальное апостериорное семейство K-решений некоторой дифференциальной системы* (1)*, двойственная сигнатура СВИ*», в терминах которых можно конструктивно построить разложение вида (7). Следует, однако, иметь в виду, что аналитические решения задачи СВИ, удовлетворяющие лишь правилам *а)* и *б)*, могут иметь самую замысловатую структуру. Так, например, когда *N* – конечное множество, то допустим вариант, при котором задача СВИ вполне разрешима для любой линейной комбинации из *N*, тогда как над всем множеством *N* она разрешима лишь частично (см., например, конструкцию примера [24, с. 52]).

В случае, когда *N* – суть бесконечное множество динамических процессов, возможен вариант, при котором задача СВИ вполне разрешима для любого элемента из Sp(*N*), в то время как над всем множеством *N* задача СВИ не разрешима даже частично. В связи с этим полезно вводить те или иные дополнительные условия, выделяющие более узкие классы задач СВИ. Вышеизложенное можно рассматривать

---

[7] Здесь преднамеренно, ставим «…», так как «*спектральная*» терминология двусмысленна с учётом классических разделов теории операторов. Вместо неё уместнее говорить (употреблять) о «*гармоническом*» варианте термина. Однако необходимо признать, что «спектральные доводы» настолько укрепились в специальной литературе по ортогональным разложениям [26, 27], что, по-видимому, бесполезно настаивать на изменении.

[8] Чтобы получить более выпуклое представление о возможном прикладном аспекте пунктов *а)* и *б)* определения 4, полезно (интересуясь «рецептурной» стороной вычислений) обратиться к рассмотренной в монографии [26] задаче *спектральной* идентификации *элементов* матриц $A(\cdot)$, $B(\cdot)$ и $B^{\#}(\cdot)$ из дифференциальной системы (1) по замерам в точках интервала *T* вектор-функции $(x(t),u(t),u^{\#}(x(t)))$. Так как всё обсуждение в монографии [26] для данной задачи ведётся без анализа критерия, подобного пункту *а),* то даже в предположении, что алгоритмическая реализация полученного в [26] её (спектральной задачи) решения удовлетворяет пункту *б),* эта реализация не гарантирует обеспечения спектрально-параметрической идентифицируемости в том смысле, как это трактуется авторами указанной монографии, а именно, вычисление элементов матриц $A(\cdot)$, $B(\cdot)$ и $B^{\#}(\cdot)$ в ортогональном базисе из $L_2(T,\mu,R)$.

как «*идеологическую*» подготовку к введению основного в разделе 5 понятия, а именно, $(A,B,B^{\#})_{\min}$-*реализации*, с помощью которой появляется (при апостериорном моделировании) возможность оперировать «*оптимальными*» сигнатурами СВИ.

5. ВОКРУГ РЕАЛИЗАЦИИ *D*-СИСТЕМЫ С МИНИМАЛЬНОЙ $||\cdot||_{\mathrm{L}}$-НОРМОЙ

Обозначим через $(\mathbf{L}^2,||\cdot||_{\mathrm{L}}{}^2)$ – пространство $\mathbf{L}_2$ с нормой

$$||(A(\cdot),B(\cdot),B^{\#}(\cdot))||_{\mathrm{L}}2:=(\Sigma_{1\le i\le n}\Sigma_{1\le j\le n}(\int_T a_{ij}^{\,2}(t)\mu(dt))+$$

$$+\Sigma_{1\le i\le n}\Sigma_{1\le j\le m}(\int_T b_{ij}^{\,2}(t)\mu(dt)))^{1/2}+\Sigma_{1\le i\le n}\Sigma_{1\le j\le k}(\int_T b^{\#\,2}_{ij}(t)\mu(dt)),$$

$$(A(\cdot),B(\cdot),B^{\#}(\cdot))=([a_{ij}(\cdot)],[b_{ij}(\cdot)],[b^{\#}_{ij}(\cdot)])\in\mathbf{L}^2;$$

в силу теоремы 8 [25, с. 162] линейное $(A,B,B^{\#})_2$-многообразие $(\mathbf{L}^2,||\cdot||_{\mathrm{L}}{}^2)$ гильбертово.

Определение 6. *Пусть* $P\subset\mathbf{\Pi}\subset H_2$. *Скажем, что упорядоченная тройка матричных функций* $(A'(\cdot),B'(\cdot),B'^{\#}(\cdot))\in\mathbf{L}^2$ *является* $(A,B,B^{\#})_{\min}$-*реализацией над* P, *если имеют место оба условия*:

– P *есть семейство* K-*решений системы* (1) *с* $(A,B,B^{\#})_2$-*моделью* $(A'(\cdot),B'(\cdot),B'^{\#}(\cdot))$;

– *упорядоченная тройка* $(A'(\cdot),B'(\cdot),B'^{\#}(\cdot))$ *имеет в* $(\mathbf{L}^2,||\cdot||_{\mathrm{L}}{}^2)$ *минимальную норму среди всех норм от* $(A,B,B^{\#})_2$-*моделей, определяющих* D-*реализации* (1) *динамического пучка* P.

Наша цель – установить: если $P=N^*$ (где N^* из теоремы 3), то $(A,B,B^{\#})_{\min}$-реализация над P существует, единственна (как элемент $(A,B,B^{\#})_2$-многообразия $(\mathbf{L}^2,||\cdot||_{\mathrm{L}}{}^2)$) и решает единственным образом (в отличие от теоремы 3) задачу $H_2\mathfrak{R}$-$\xi_{\min}$-модели для динамического процесса N^*. Последнее обстоятельство указывает на то, что понятие $(A,B,B^{\#})_{\min}$-реализации возникает естественным образом, а исследование структуры сигнатуры СВИ, содержащей данную $(A,B,B^{\#})_{\min}$-реализацию, и находящейся в двойственности к N^*, носит сугубо прагматический характер.

Пусть $N^*:=\{(x^*,u^*,u^{\#}(x^*))\}$, где динамический процесс $(x^*,u^*,u^{\#}(x^*))$ обладает D-реализацией (1). Обозначим через Λ^* пространство сигнальных функций [22], отвечающее $(x^*,u^*,u^{\#}(x^*))$, через Ω^* – максимальный I-базис [22], индуцированный $(x^*,u^*,u^{\#}(x^*))$ и Λ^*. Согласно теоремы 1 [22] семейство функций Λ^*, I-базис Ω^* и специальная μ-непрерывная мера ν имеют представления вида:

$$\Lambda^*=\mathrm{L}_2(T,\nu,R),$$

$$\nu(S)=\int(||x^*(t)||^2_{R^n}+||u^*(t)||^2_{R^m}+||u^{\#}(x^*(t))||^2_{R^k})\mu(dt),\ S\in\mathfrak{C}_\mu,$$

$$\Omega^*=\{\lambda\cdot(x^*,u^*,u^{\#}(x^*)):\lambda\in\Lambda^*\},$$

где $||\cdot||_R n$, $||\cdot||_R m$ и $||\cdot||_R k$ евклидовы, при этом в $\mathrm{L}_2(T,\nu,R)$ мера ν расширена на σ-алгебру $\mathfrak{C}_\nu$.

Теперь на $L(H_2,R^n)$ рассмотрим [21, 22, 28] формальный I-процесс:

$$\{H_2,R^n,(L(H_2,R^n),\cap\{\pi_\omega{}^{*-1}[\Delta_R n]:\omega\in W\},\cap\{\pi_\omega{}^{-1}[\xi(\omega)]:\omega\in W\}):\exists W\subset\Omega^*\},$$

где π_ω: $L(H_2,R^n)\to R^n$ – отображение вычисления в точке $\omega\in\Omega^*$ и $\pi_\omega{}^*$ – его каноническое распространение [28], $\xi(\omega)=\xi(\lambda\cdot(x^*,u^*,u^{\#}(x^*)))=\int_T(\lambda(t)dx^*(t)/dt)\mu(dt)$, $\lambda\in\Lambda^*$ (см. формулу (3) [22]), $\Delta_R n$ – диагональ в $R^n\times R^n$. В силу теоремы 4 [22] данный I-процесс выделяет в $L(H_2,R^n)$ тождественный (в соответствии с леммой 2 [5]) нетривиальный (не одноточечный) класс ξ_2-моделей, равный

$$\cap\{\pi_\omega{}^{-1}[\int_T(\lambda(t)dx^*(t)/dt)\mu(dt)]\subset L(H_2,R^n):\omega=\lambda\cdot(x^*,u^*,u^{\#}(x^*)),\ \lambda\in\Lambda^*\}.$$

Этому классу на основании леммы 2 [5] в $\mathbf{L}^2$ отвечает класс $(A,B,B^{\#})_2$-моделей, который, обозначим через $\mathbf{L}^*$; ясно, что система (1) с $(A,B,B^{\#})_2$-моделью из $\mathbf{L}^*$ содержит в множестве своих допустимых троек типа «*K-решение, программное управление, позиционное управление*» тройку $(x^*,u^*,u^{\#}(x^*))$, причём класс $\mathbf{L}^*$ по данному признаку является максимальным в $\mathbf{L}^2$.

Лемма 3. *Класс* $\mathbf{L}^*$ *замкнут в* $\mathbf{L}^2$.

Принимая во внимание, что многообразие $\mathbf{L}^*$ является классом смежности по некоторому подпространству пространства $\mathbf{L}^2$, и учитывая тот факт, что $\mathbf{L}^2$ имеет структуру гильбертова пространства, можно подвести аналитический итог:

Теорема 5. $(A,B,B^{\#})_{\min}$-*реализация для* N^* *существует, единственна, принадлежит* $\mathbf{L}^*$, *решает задачу* $H_2\mathfrak{R}$-$\xi_{\min}$-*модели для* N^* *и имеет вид* (6).

Определим аналитическое представление сигнатуры СВИ, находящейся в двойственности к N^* и такой, что её структура в качестве третьей компоненты содержит $(A,B,B^{\#})_{\min}$-реализацию над N^*. С этой целью выделим в Λ^* полную ортогональную систему функций $\{\phi_i\}$ (ясно, что в терминах меры μ система $\{\phi_i\}$ ортогональная с весом $(||x^*(\cdot)||^2_{R^n}+||u^*(\cdot)||^2_{R^m}+||u^{\#}(x^*(\cdot))||^2_{R^k})$). Для определённости рассмотрим тригонометрическую систему, которую обозначим как $\{\phi^*_j\}$. Тогда

$$\{\phi^*_j\}=\{1,\sin(2\pi j\tau(\cdot)/\nu(T)),\cos(2\pi j\tau(\cdot)/\nu(T)):\tau(t)=\nu([t_0,t]),\ t\in T=[t_0,t_1],\ j=1,2,\ldots\}.$$

Далее, рассмотрим сигнатуру $\mathrm{SIG}^*:=(\{(\Omega^*{}_2)_i\}_{1\le i\le n},\{\phi^*_{ij}\}_{1\le i\le n,\,j=1,2,\ldots},(A^*(\cdot),B^*(\cdot),B^{*\#}(\cdot)))$.

Теорема 6. *Сигнатура* SIG* *находится в двойственности к* N^*.

Сравнительно простое устроение сигнатуры SIG* приводит к вопросу: как для произвольной пары индексов (i,j), $1\le i\le n$, $j=1,2,\ldots$ определить численное значение коэффициента c_{ij} в формуле (7), отвечающее данной сигнатуре? Конструктивный ответ на этот вопрос означал бы окончательную точку в аналитическом рассмотрении проблемы вполне разрешимости задачи СВИ для $H_2\Re$-$\xi_{\min}$-модели и $(A,B,B^{\#})_{\min}$-реализации над динамическим процессом N^*. Ниже установим основные элементы процедуры вычислений коэффициентов Фурье из разложения (7), а также определённые виды и аналитические условия сходимости функционального предела (8).

Пусть в терминах, принятых выше, $(x^*,u^*,u^{\#}(x^*))$ и $[s_i^*(\cdot)]:=[A^*(\cdot),B^*(\cdot),B^{*\#}(\cdot)]$ – аналитические конструкции, определяющие структуру сигнатуры SIG*. Тогда

$$s_i^* = \lambda_i\cdot(x^*,u^*,u^{\#}(x^*)) \quad (1\le i\le n), \tag{9}$$

при некоторой сигнальной функции $\lambda_i\in\Lambda^*$, своей (единственной по mod ν) для каждого индекса i; всюду далее под s_i^*, λ_i $(1\le i\le n)$ будем понимать конструкции из (9). В соответствии с (9) правило определения коэффициентов Фурье в (7) для случая N^* даёт следующее предложение:

Теорема 7. *Пусть* $\tau(t):=\nu([t_0,t])$, *тогда*:

а) $s_i^*(t) = (\alpha_{i0} + \Sigma_{j=1,2,\ldots}(\alpha_{ij}\sin(2\pi j\tau(t)/\nu(T)) + \beta_{ij}\cos(2\pi j\tau(t)/\nu(T))))(x^*(t),u^*(t),u^{\#}(x^*(t)))$ *с коэффициентами* α_{ij}, β_{ij}, $(1\le i\le n)$ *равными*

$$\alpha_{i0} = (\textstyle\int_T\lambda_i(t)\nu(dt))/\nu(T),$$
$$\alpha_{ij} = (\textstyle\int_T\lambda_i(t)\sin(2\pi j\tau(t)/\nu(T))\nu(dt))/\nu(T),$$
$$\beta_{ij} = (\textstyle\int_T\lambda_i(t)\cos(2\pi j\tau(t)/\nu(T))\nu(dt)))/\nu(T),$$

б) $||(A^*(\cdot),B^*(\cdot),B^{*\#}(\cdot))||_L^2=(\Sigma_{1\le i\le n}(\int_T\gamma_i^2(t)\nu(dt))^{1/2}$, *где* $\gamma_i(t) = (dx_i^*(t)/dt)(d\tau(t)/dt)^{-1}$ *и* $\gamma_i=\lambda_i$.

Замечание 6. Поскольку $\operatorname{supp}(dx_i^*/dt)\subset\operatorname{supp}(d\tau/dt)$ по mod μ (т.к. N^* – K-решение), то функции γ_i, $1\le i\le n$ определены корректно.

Перейдём теперь к группе вопросов, связанных с рассмотрением свойства сходимости предела (8) при его реализации в структуре сигнатуры SIG*.

Теорема 8. *Для фиксированной точки* $t\in T$ *предел* (8) *сходится к* $s_i^*(t)\in R^{n+m+k}$ *в структуре* SIG*, *если при некотором* $\delta>0$ *существует* $\int_{T\delta}|(\lambda_i(t+z)-\lambda_i(t))/z|\nu(dz)$, *где* $T_\delta:=[t-\delta,t+\delta]\cap T$, *а* s_i^* *и* λ_i *связаны соотношением* (9).

Доказательство. Обозначим через $s^g{}_i$ частичную (по индексу g) сумму ряда Фурье для s_i^* в структуре SIG*. Тогда вектор-функция $s^g{}_i$ в силу теоремы 7 имеет вид:

$$s^g{}_i(t)=(\alpha_0+\Sigma_{j=1,\ldots,g}(\alpha_j\sin(2\pi j\tau(t)/\nu(T))+\beta_j\cos(2\pi j\tau(t)/\nu(T))))(x^*(t),u^*(t),u^{\#}(x^*(t)))$$

с формулами для α_j, β_j, представленными соотношениями:

$$\alpha_0=(\textstyle\int_T\lambda_i(t)\nu(dt))/\nu(T),$$
$$\alpha_j=(\textstyle\int_T\lambda_i(t)\sin(2\pi j\tau(t)/\nu(T))\nu(dt))/\nu(T)$$
$$\beta_j=(\textstyle\int_T\lambda_i(t)\cos(2\pi j\tau(t)/\nu(T))\nu(dt)))/\nu(T).$$

Используя эти соотношения, а также формулу (9), определим в точке $t\in T$ величину разности $s^g{}_i(t)-s_i^*(t)$ в норме евклидова пространства R^{n+m+k}:

$$||s^g{}_i(t)-s_i^*(t)||_R n+m+k=|\textstyle\int_T(\lambda_i(t+z)-$$
$$-\lambda_i(t))\sin(2\pi(2g+1)\tau(t)/\nu(T))/\sin(2\pi\tau(t)/\nu(T)))\nu(dz)|\cdot$$
$$\cdot||(x^*(t),u^*(t),u^{\#}(x^*(t)))||_R n+m+k/\nu(T).$$

Таким образом, вопрос о сходимости $s^g{}_i(t)$ $(g\to\infty)$ из (8) последовательно свели к вопросу о стремлении к нулю интеграла с ядром Дирихле при наличии условий Дини. Дальнейшие выкладки опускаем, отсылая за деталями (если они необходимы) к выводу теоремы 1 [25, с. 409]. □

Оценка взаимной близости элементов пространства $C(T,R^{n+m+k})$ в топологии sup-нормы позволяет более тоньше (в сравнении с топологией поточечной сходимости) выяснить степень отклонения между частичной суммой ряда (8) и вектор-функцией s_i^*. Это даёт основание подробнее рассмотреть условия равномерной сходимости предела (8); ясно, что, если вектор-функция s_i^* имеет хотя бы один разрыв на T, то её ряд Фурье не может сходиться к ней равномерно и, таким образом, непрерывность отображения $s_i^*: T\to R^{n+m+k}$ есть необходимое (но, конечно, не достаточное) условие равномерной сходимости предела (8).

Теорема 9. *Пусть* $N^*\subset AC(T,R^n)\times C(T,R^m)\times C(T,R^k)$. *Тогда предел* (8) *сходится к* $s_i^*\in C(T,R^{n+m+k})$ *в сигнатуре* SIG* *равномерно на* $T=[t_0,t_1]$, *если выполняется хотя бы одно из следующих условий*:

а) $(\forall\varepsilon>0)\ (\exists\delta>0)\ (\forall t\in T)$: $\int_{T\delta}|(\lambda_i(t+z)-\lambda_i(t))/z|\nu(dz)$, *где* $T_\delta:=[t-\delta,t+\delta]\cap T$;

б) $\lambda_i \in AC(T,R) \& d\lambda_i/dt \in L_2(T,\nu,R) \& \lambda_i(t_0)=\lambda_i(t_1)$.

(Схема доказательства теоремы 8, с учётом теорем 2 и 3 [25, с. 409], с модификацией переносится на случай равномерной сходимости предела (8), иначе говоря, – на теорему 9.)

Теорема 9 утверждает, что аппроксимация нестационарных вектор-строк матричной модели $(A,B,B^{\#})_{\min}$-реализации конструкциями частичных сумм векторных рядов Фурье вида $s^g_i(t)$, $1 \le i \le n$ приближает ($g \to \infty$) к физически реализуемой $(A,B,B^{\#})_2$-модели класса $C(T,L(R^n,R^n)) \times C(T,L(R^m,R^n)) \times C(T,R^k)$; правда это приближение ограничивается выполнением пунктов *а)* или *б)*. Если искать для *б)* более слабые условия на конструкцию семейства сигнальных функций $\{\lambda_i\}_{1 \le i \le n} \subset AC(T,R)$, а именно, $\{\lambda_i\}_{1 \le i \le n} \subset C(T,R)$, то (привлекая теорему Фейера [25, с. 415]) небольшое изменение в процедуре предела (8) приводит к такому же качественному результату, как и теорема 9, а именно, равномерной сходимости к вектор-функции s^*_i.

Теорема 10. *Пусть* $N^* \subset AC(T,R^n) \times C(T,R^m) \times C(T,R^k)$, $\lambda_i \in C(T,R)$, $\lambda_i(t_0)=\lambda_i(t_1)$ *и* $s_{ig}(t) := g^{-1} s^g_i(t)$, *где* s^g_i *– частичная сумма ряда Фурье для* SIG*. *Тогда* $s_{ig} \underset{g}{\longrightarrow} s^*_i$ *– равномерная сходимость на* $T=[t_0,t_1]$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Норма оператора является мерой того, насколько он «усиливает/ослабляет» входные сигналы, измеряемые в соответствующей норме. Обычно желательно выбрать модель так, чтобы эта норма была по возможности мала – это означает, что выход системы будет мал при *любых возмущениях*, ограниченных в соответствующей норме. В этой парадигме в работе формализованы математические понятия, такие как $\xi_{\min}$-модель, $(A,B,B^{\#})_{\min}$-реализация, $H_2\Re$-$\xi_{\min}$-модель, процедура СВИ, позволяющие с общих теоретико-системных позиций подходить к исследованию свойств существования и моделирования дифференциальных $(A,B,B^{\#})_2$-моделей, при этом формулировать утверждения о таких свойствах с помощью единой системы понятий и терминов, которая обеспечивает необходимую общность исследований, позволяя в то же время естественно излагать решения конкретных прикладных коэффициентно-операторных обратных задач [29], в том числе, аналитической нейродинамики [30–32][9]. К основным результатам структурно-параметрической идентификации, установленным в данной работе, относятся следующие положения:

– определены необходимые и достаточные условия существования дифференциальных реализаций нестационарных $(A,B,B^{\#})_p$-моделей с минимальной операторной нормой в зависимости от метрических структур пространств входных и выходных сигналов;

– в рамках Фурье-анализа обоснована и построена процедура спектрально-векторной идентификации матричного представления $(A,B,B^{\#})_2$-модели в дифференциальной реализации моделируемого динамического процесса $N^*=\{(x^*,u^*,u^{\#}(x^*))\}$.

Также отметим, что использование в определении 5 двух различных понятий *а)* и *б)* позволяет методологически разделить исследование задачи СВИ на две независимые части, т.к. *а)* отражает геометрическую сторону её решения (и по существу носит характер *структурного тестирования*), *б)* – алгебраическую (выявляя аспект *параметрической идентификации*). При этом важность введения этих понятий состоит ещё и в том, что они порождают некоторый математический аппарат апостериорного моделирования *D*-систем, расширяя его проблематику и подсказывая новые пути и подходы, значение которых не ограничивается спецификой задачи СВИ, если ставить в развитии теории реализации динамических систем не самые узкие цели.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Калман, Р.* Очерки по математической теории систем / Р. Калман, П. Фалб, М. Арбиб. – М.: Мир, 1971. – 400 с.
2. *Месарович, М.* Общая теория систем: Математические основы / М. Месарович, Я. Такахара. – М.: Мир, 1978. – 312 с.
3. *Русанов, В.А.* Характеристический признак реализации нестационарной дифференциальной системы в банаховом пространстве / В.А. Русанов, А.В. Лакеев, Ю.Э. Линке // Доклады РАН. – 2011. – Т. 438. – № 3. – С. 323-325.
4. *Rusanov V.A., Lakeyev A.V., Banshchikov A.V., Daneev A.V.* On the bilinear second order differential realization of a infinite-dimensional dynamical system: An approach based on extensions to M_2-operators // Fractal and Fractional (Special Issues: Nonlinear Functional Analysis and Applications). 2023. Vol. 7. No. 4. P. 310-327.
5. *Rusanov V.A., Antonova L.V., Daneev A.V.* Inverse problem of nonlinear systems analysis: A behavioral approach // Advances in Differential Equations and Control Processes. 2012. Vol. 10. No. 2. P. 69-88.
6. *Варга Дж.* Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями / Дж. Варга. – М.: Наука, 1977. – 624 с.

[9] Полученные в [32] результаты имеют приложение в нелинейном прецизионном моделировании (на алгоритмической базе методов и средств компьютерной алгебры [33]) многомерных дифференциальных уравнений нелинейной нейродинамики, составляя математическую основу динамического анализа поведения локальных нейропопуляций.

7. *Иосида К.* Функциональный анализ / К. Иосида. – М.: Мир, 1967. – 624 с.
8. *Банщиков А.В.* О полилинейной дифференциальной реализации детерминированного динамического хаоса в классе уравнений высших порядков с запаздыванием / А.В. Банщиков, А.В. Лакеев, В.А. Русанов // Известия вузов. Математика. – 2023. – № 10. – С. 3-21.
9. *Лакеев А.В.* К геометрической теории реализации нелинейных управляемых динамических процессов в классе билинейных моделей второго порядка / А.В. Лакеев, Ю.Э. Линке, В.А. Русанов // Дальневосточный математический журнал. – 2024. – Т. 24. – № 2. – С. 200-219.
10. *Rusanov V.A., Lakeyev A.V., Linke Yu.É., Banshchikov A.V.* Toward a theory of inverse problems for bilinear dynamic systems described by eight-variant second-order differential equation: a Geometric approach // Far East Journal of Mathematical Sciences (FJMS). 2025. Vol. 142. No. 3. P. 369-398.
11. *Русанов, В.А.* К разрешимости дифференциальной реализации минимального динамического порядка семейства нелинейных процессов «вход-выход» в гильбертовом пространстве / В.А. Русанов, А.В. Лакеев, Ю.Э. Линке // Дифференциальные уравнения. – 2015. – Т. 51. – № 4. – С. 524-537.
12. *Русанов, В.А.* К теории структурной идентификации нелинейных многомерных систем / В.А. Русанов, Д.Ю. Шарпинский // Прикладная математика и механика. – 2010. – Т. 74. – Вып. 1. – С. 119-132.
13. *Канторович, Л.В.* Функциональный анализ / Л.В. Канторович, Г.П. Акилов. – М.: Наука, 1977. – 742 с.
14. *Nachbin L.A.* Theorem of the Hahn-Banach type for linear transformations // Trans. Amer. Math. Soc. 1950. Vol. 68. No. 1. P. 29-46.
15. *Лакеев, А.В.* Оператор Релея-Ритца в обратных задачах полилинейных неавтономных эволюционных уравнений высших порядков / А.В. Лакеев, Ю.Э. Линке, В.А. Русанов // Математические труды. – 2023. – Т. 26. – № 2. – С. 162-176.
16. *Kakutani S.* Some characterization of Euclidean space // Jap. Jorn. Math. 1939. Vol. 16. No. 2. P. 93-98.
17. *Данеев, А.В.* К теории реализации сильных дифференциальных моделей. I / А.В. Данеев, А.В. Лакеев, В.А. Русанов, М.В. Русанов // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2005. – Т. VIII. – № 1. – С. 53-63.
18. Данеев, *А.В.* Принцип максимума энтропии в структурной идентификации динамических систем. Аналитический подход / А.В. Данеев, В.А. Русанов, Д.Ю. Шарпинский // Известия вузов. Математика. – 2005. – № 11. – С. 16-24.
19. *Barbu, V.* Nonlinear Semigroups and Differential Equations in Banach Space. Leyden (the Netherlands): Ncordhoff International Publishing, 1976. 352 p.
20. Энгелькинг, Р. Общая топология / Р. Энгелькинг. – М.: Наука, 1986. – 752 с.
21. *Rusanov V.A., Daneev A.V., Linke Yu.É., Sizykh V.N., Voronov V.A.* System-theoretical foundation for identification of dynamic systems. I // Far East Journal of Mathematical Sciences (FJMS). 2018. Vol. 106. No. 1. P. 1-42.
22. *Данеев, А.В.* К методам качественной теории идентификации сложных динамических систем / А.В. Данеев, В.А. Русанов // Доклады РАН. – 1997. – Т. 355. – № 2. – С. 174-177.
23. *Данеев, А.В.* Геометрический подход к решению некоторых обратных задач системного анализа / А.В. Данеев, В.А. Русанов // Известия вузов. Математика. – 2001. – № 10. – С. 18-27.
24. *Данеев, А.В.* К теории реализации сильных дифференциальных моделей. II / А.В. Данеев, А.В. Лакеев, В.А. Русанов // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2005. – Т. VIII. – № 2. – С. 46-56.
25. *Колмогоров, А.Н.* Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. – М.: Наука, 1976. – 544 с.
26. *Солодовников, В.В.* Спектральные методы расчета и проектирования систем управления / В.В. Солодовников, А.Н. Дмитриев, Н.Д. Егупов. – М.: Машиностроение, 1986. – 440 с.
27. *Залманзон, Л.А.* Преобразование Фурье, Уолша, Хаара и их применение в управлении, связи и других областях / Л.А. Залманзон. – М.: Наука, 1989. – 496 с.
28. *Данеев, А.В.* К аксиоматической теории идентификации динамических систем. I / А.В. Данеев, В.А. Русанов // Автоматика и телемеханика. – 1994. – № 8. – С. 126-136.
29. *Hasanov A.H., Romanov V.G.* Introduction to Inverse Problems for Differential Equations. Berlin: Springer International Publishing AG, 2017, 2021. 515 p.
30. *Yoshida N.* Functional neuromuscular stimulation for articular angle control with an inverse dynamics model tuned by a neural network // Ergonomics. 2002. Vol. 45. No. 9. P. 649-662.
31. *Савельев, А.В.* Источники вариаций динамических свойств нервной системы на синаптическом уровне в нейрокомпьютинге / А.В Савельев. // Искусственный интеллект. – 2006. – № 4. – С. 323-338.
32. *Rusanov V.A., Daneev R.A.* On inverse problems in mathematical neuroscience: Nonlinear neurodynamic processes described by second-order bilinear evolution equations with delay // Nonlinear Science and Control Engineering. 2025. Vol. 10. No. 10. P. 1-10 (doi: 10.36922/NSCE025310007).
33. *Shen J.L., Zhang R.F., Huang J.W., Gao Y., Liang J.B.* Exact solutions of the (2+1)-dimensional BLMP equation via neural network based symbolic computation // Advances in Differential Equations and Control Processes. 2025. Vol. 32. No. 4. P. 1-18.

ON COEFFICIENT-OPERATOR INVERSE PROBLEMS WITH CRITERION OF MINIMUM OPERATOR NORM

© 2026 A.V. Banshchikov[1], R.A. Daneev[2], V.A. Rusanov[1]

[1] Institute of System Dynamics and Control Theory named after V.M. Matrosov, Irkutsk, Russia
[2] East Siberian Institute of the Ministry of Affairs of Russia, Irkutsk, Russia

In the framework of the theory of realization of dynamical systems (D-systems), the necessary and sufficient conditions for the existence of a differential realization of a nonlinear nonautonomous D-system defined by a beam of trajectory curves in a uniformly convex Banach space are obtained. The coefficient-operator represen-tation of differential equations of the modeled D-system is burdened with the condition under which nonsta-tionary operator coefficients of state equations of D-system have a minimum operator norm.
Keywords: nonlinear nonautonomous dynamical systems, coefficient-operator inverse problems of differ-ential equations, realization of dynamic systems with minimum operator norm.

DOI: 10.37313/1990-5378-2026-28-4-224-237
EDN: JZHYDB

REFERENCES

1. *Kalman, R.* Ocherki po matematicheskoj teorii sistem / R. Kalman, P. Falb, M. Arbib. – M.: Mir, 1971. – 400 s.
2. *Mesarovich, M.* Obshchaya teoriya sistem: Matematicheskie osnovy / M. Mesarovich, Ya. Takahara. – M.: Mir, 1978. – 312 s.
3. *Rusanov, V.A.* Harakteristicheskij priznak realizacii nestacionarnoj differencial'noj sistemy v banahovom prostranstve / V.A. Rusanov, A.V. Lakeev, Yu.E. Linke // Doklady RAN. – 2011. – T. 438. – № 3. – C. 323-325.
4. *Rusanov V.A., Lakeyev A.V., Banshchikov A.V., Daneev A.V.* On the bilinear second order differential realization of a infinite-dimensional dynamical system: An approach based on extensions to M2-operators // Fractal and Fractional (Special Issues: Nonlinear Functional Analysis and Applications). 2023. Vol. 7. No. 4. P. 310-327.
5. *Rusanov V.A., Antonova L.V., Daneev A.V.* Inverse problem of nonlinear systems analysis: A behavioral approach // Advances in Differential Equations and Control Processes. 2012. Vol. 10. No. 2. P. 69-88.
6. *Varga Dzh.* Optimal'noe upravlenie differencial'nymi i funkcional'nymi uravneniyami / Dzh. Varga. – M.: Nauka, 1977. – 624 s.
7. *Iosida K.* Funkcional'nyj analiz / K. Iosida. – M.: Mir, 1967. – 624 s.
8. *Banshchikov A.V.* O polilinejnoj differencial'noj realizacii determinirovannogo dinamicheskogo haosa v klasse uravnenij vysshih poryadkov s zapazdyvaniem / A.V. Banshchikov, A.V. Lakeev, V.A. Rusanov // Izvestiya vuzov. Matematika. – 2023. – № 10. – S. 3-21.
9. *Lakeev A.V.* K geometricheskoj teorii realizacii nelinejnyh upravlyaemyh dinamicheskih processov v klasse bilinejnyh modelej vtorogo poryadka / A.V. Lakeev, Yu.E. Linke, V.A. Rusanov // Dal'nevostochnyj matematicheskij zhurnal. – 2024. – T. 24. – № 2. – S. 200-219.
10. *Rusanov V.A., Lakeyev A.V., Linke Yu.É., Banshchikov A.V.* Toward a theory of inverse problems for bilinear dynamic systems described by eight-variant second-order differential equation: a Geometric approach // Far East Journal of Mathematical Sciences (FJMS). 2025. Vol. 142. No. 3. P. 369-398.
11. *Rusanov, V.A.* K razreshimosti differencial'noj realizacii minimal'nogo dinamicheskogo poryadka semejstva nelinejnyh processov «vhod-vyhod» v gil'bertovom prostranstve / V.A. Rusanov, A.V. Lakeev, Yu.E. Linke // Differencial'nye uravneniya. – 2015. – T. 51. – № 4. – S. 524-537.
12. *Rusanov, V.A.* K teorii strukturnoj identifikacii nelinejnyh mnogomernyh sistem / V.A. Rusanov, D.Yu. Sharpinskij // Prikladnaya matematika i mekhanika. – 2010. – T. 74. – Vyp. 1. – S. 119-132.
13. *Kantorovich, L.V.* Funkcional'nyj analiz / L.V. Kantorovich, G.P. Akilov. – M.: Nauka, 1977. – 742 s.
14. *Nachbin L.A.* Theorem of the Hahn-Banach type for linear transformations // Trans. Amer. Math. Soc. 1950. Vol. 68. No. 1. P. 29-46.
15. *Lakeev, A.V.* Operator Releya-Ritca v obratnyh zadachah polilinejnyh neavtonomnyh evolyucionnyh uravnenij vysshih poryadkov / A.V. Lakeev, Yu.E. Linke, V.A. Rusanov // Matematicheskie trudy. – 2023. – T. 26. – № 2. – S. 162-176.
16. *Kakutani S.* Some characterization of Euclidean space // Jap. Jorn. Math. 1939. Vol. 16. No. 2. P. 93-98.
17. *Daneev, A.V.* K teorii realizacii sil'nyh differencial'nyh modelej. I / A.V. Daneev, A.V. Lakeev, V.A. Rusanov, M.V. Rusanov // Sibirskij zhurnal industrial'noj matematiki. – 2005. – T. VIII. – № 1. – S. 53-63.
18. *Daneev, A.V.* Princip maksimuma entropii v strukturnoj identifikacii dinamicheskih sistem. Analiticheskij podhod / A.V. Daneev, V.A. Rusanov, D.Yu. Sharpinskij // Izvestiya vuzov. Matematika. – 2005. – № 11. – C. 16-24.
19. *Barbu, V.* Nonlinear Semigroups and Differential Equations in Banach Space. Leyden (the Netherlands): Ncordhoff International Publishing, 1976. 352 p.
20. *Engel'king, R.* Obshchaya topologiya / R. Engel'king. – M.: Nauka, 1986. – 752 s.
21. *Rusanov V.A., Daneev A.V., Linke Yu.É., Sizykh V.N., Voronov V.A.* System-theoretical foundation for identification of dynamic systems. I // Far East Journal of Mathematical Sciences (FJMS). 2018. Vol. 106. No. 1. P. 1-42.

22. *Daneev, A.V.* K metodam kachestvennoj teorii identifikacii slozhnyh dinamicheskih sistem / A.V. Daneev, V.A. Rusanov // Doklady RAN. – 1997. – T. 355. – № 2. – C. 174-177.
23. *Daneev, A.V.* Geometricheskij podhod k resheniyu nekotoryh obratnyh zadach sistemnogo analiza / A.V. Daneev, V.A. Rusanov // Izvestiya vuzov. Matematika. – 2001. – № 10. – C. 18-27.
24. *Daneev, A.V.* K teorii realizacii sil'nyh differencial'nyh modelej. II / A.V. Daneev, A.V. Lakeev, V.A. Rusanov // Sibirskij zhurnal industrial'noj matematiki. – 2005. – T. VIII. – № 2. – S. 46-56.
25. *Kolmogorov, A.N.* Elementy teorii funkcij i funkcional'nogo analiza / A.N. Kolmogorov, S.V. Fomin. – M.: Nauka, 1976. – 544 s.
26. *Solodovnikov, V.V.* Spektral'nye metody rascheta i proektirovaniya sistem upravleniya / V.V. Solodovnikov, A.N. Dmitriev, N.D. Egupov. – M.: Mashinostroenie, 1986. – 440 s.
27. *Zalmanzon, L.A.* Preobrazovanie Fur'e, Uolsha, Haara i ih primenenie v upravlenii, svyazi i drugih oblastyah / L.A. Zalmanzon. – M.: Nauka, 1989. – 496 s.
28. *Daneev, A.V.* K aksiomaticheskoj teorii identifikacii dinamicheskih sistem. I / A.V. Daneev, V.A. Rusanov // Avtomatika i telemekhanika. – 1994. – № 8. – C. 126-136.
29. Hasanov A.H., Romanov V.G. Introduction to Inverse Problems for Differential Equations. Berlin: Springer International Publishing AG, 2017, 2021. 515 p.
30. *Yoshida N.* Functional neuromuscular stimulation for articular angle control with an inverse dynamics model tuned by a neural network // Ergonomics. 2002. Vol. 45. No. 9. P. 649-662.
31. *Savel'ev, A.V.* Istochniki variacij dinamicheskih svojstv nervnoj sistemy na sinapticheskom urovne v nejrokomp'yutinge / A.V Savel'ev. // Iskusstvennyj intellekt. – 2006. – № 4. – S. 323-338.
32. *Rusanov V.A., Daneev R.A.* On inverse problems in mathematical neuroscience: Nonlinear neurodynamic processes described by second-order bilinear evolution equations with delay // Nonlinear Science and Control Engineering. 2025. Vol. 10. No. 10. P. 1-10 (doi: 10.36922/NSCE025310007).
33. *Shen J.L., Zhang R.F., Huang J.W., Gao Y., Liang J.B.* Exact solutions of the (2+1)-dimensional BLMP equation via neural network based symbolic computation // Advances in Differential Equations and Control Processes. 2025. Vol. 32. No. 4. P. 1-18.

Andrey Banshchikov, PhD in Physics and Mathematics, Head of the Department of Dynamic Properties and Control of Complex Objects in Space.
Roman Alekseevich Daneev, PhD in Engineering, Associate Professor, Department of Information Technology. E-mail: romasun@mail.ru
Vyacheslav Anatolyevich Rusanov, Doctor of Physics and Mathematics, Senior Researcher. E-mail: v.rusanov@mail.ru