УДК 531.3/.6 : 519.6.

ПРИМЕНЕНИЕ АЛГОРИТМОВ ОПТИМИЗАЦИИ В ЗАДАЧАХ МЕХАНИКИ КОНТАКТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ТЕЛ

© 2026 Е. Н. Сосенушкин, Е. А. Яновская, А. С. Желнов, М. И. Лисов

Московский государственный технологический университет «СТАНКИН», г. Москва, Россия

Статья поступила в редакцию 12.09.2026

Рассматривается задача поиска распределения контактного давления $p(x, y)$ в зоне взаимодействия двух упругих тел с шероховатыми поверхностями. Актуальность обусловлена имеющимися инженерными оценками случаев потери работоспособности машин в связи с износом сопрягаемых поверхностей. В отличие от статистических моделей шероховатого контакта (модель Гринвуда-Вильямсона), заменяющих реальный рельеф ансамблем сферических микровыступов со статистическим распределением высот, в работе используется прямой детерминированный подход, в котором математическая постановка основана на интегральном уравнении Буссинеска, связывающим поле упругих перемещений поверхности с полем контактных давлений. После дискретизации области контакта на регулярную сетку задача сводится к задаче квадратичного программирования относительно вектора узловых давлений с ограничениями типа неравенства и одним линейным ограничением равновесия. Для численного решения применяется метод проекции градиента с адаптивным выбором шага методом золотого сечения и точной нормировкой поля давлений на каждой итерации. Показано, что локальные пики давления при шероховатом контакте на 113,7% превышают значение для гладкого контакта при той же суммарной нагрузке, что количественно объясняет механизм концентрации износа в точках выступов шероховатости. Обсуждаются границы применимости упругой модели, в частности превышение расчётным давлением предела текучести стали. В дальнейшем рассматривается переход к упругопластической постановке, ускорение вычислений с помощью быстрого преобразования Фурье и расчёт износа по закону Арчарда.

Ключевые слова: контактная механика; трибология; метод проекции градиента; квадратичное программирование; уравнение Буссинеска; шероховатость поверхности; метод золотого сечения; теорема Вейерштрасса; износ.

DOI: 10.37313/1990-5378-2026-28-5-26-31
EDN: NVBRDI

Работа поддержана Минобрнауки РФ (госзадание, проект № FSFS- 2024-0007)

ПОСТАНОВКА КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ, КАК ЗАДАЧИ КВАДРАТИЧНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Когда два упругих тела взаимодействуют друг с другом: шарик подшипника касается обоймы, зуб шестерни входит в зацепление, колесо опирается на рельс, – в зоне их соприкосновения возникает поле контактного давления $p(x, y)$. Простейшая оценка «силу делить на площадь» справедлива только для идеально гладких тел: реальные инженерные поверхности шероховаты, контакт реализуется лишь на верхушках выступов, и реальная площадь контакта многократно меньше номинальной, а давление в точках фактического касания может в сотни раз превышать среднее расчётное значение [1]. Именно в этих точках инициируется локальный износ и усталостное разрушение. По инженерным оценкам, до 70% случаев потери работоспособности машин связано с износом сопрягаемых поверхностей. Знание поля $p(x, y)$ позволяет ещё на этапе проектирования выявить критические зоны и скорректировать геометрию поверхности, твёрдость материала или режим смазки, заменяя дорогостоящий натурный эксперимент вычислительным.

Существует два принципиально разных подхода к описанию шероховатого контакта. Первым является статистический [2]: в классической модели Гринвуда и Вильямсона реальная поверхность заменяется ансамблем сферических микровыступов одинакового радиуса со статистическим (обычно гауссовым) распределением высот, а суммарная нагрузка и площадь контакта находятся

Сосенушкин Евгений Николаевич, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедры композиционных материалов. E-mail: sen@stankin.ru
Яновская Елена Александровна, кандидат технических наук, доцент кафедры прикладной математики. E-mail: elena_yanovskaya@bc.ru
Желнов Андрей Сергеевич, старший преподаватель кафедры прикладной математики. E-mail: a.zhelnov@stankin.ru
Лисов Матфей Игоревич, студент кафедры прикладной математики. E-mail: matfei.lisov@yandex.ru

интегрированием по этому распределению [1, 3]. Такой подход даёт быстрые аналитические оценки, но не позволяет получить конкретную топографию давления $p(x, y)$ для заданного рельефа. Вторым подходом является детерминированный: рельеф задаётся явно, а поле давлений находится прямым численным решением контактной задачи [4]. Именно детерминированный подход использован в настоящей работе, поскольку он даёт полную карту $p(x, y)$, необходимую для локализации критических точек будущего износа [5].

Точное аналитическое решение по Герцу для контакта двух гладких тел параболической формы и более общая задача Буссинеска о деформации упругого полупространства под действием произвольно распределённой поверхностной нагрузки [1, 6] продемонстрировали следующие результаты. При действии сосредоточенной вертикальной силы F нормальное смещение поверхности на расстоянии r от точки приложения равно

$$u_z(x, y) = \frac{1 - \nu^2}{\pi E} \frac{F}{r}. \tag{1}$$

В силу линейности уравнений теории упругости для произвольного распределённого давления $p(x, y)$ справедлив принцип суперпозиции: вклад каждой элементарной площадки интегрируется по всей зоне контакта Ω. Так было получено интегральное уравнение Буссинеска:

$$u_z(x, y) = \frac{1 - \nu^2}{\pi E} \iint \frac{p(x', y')}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}} dx'dy' = \delta - g(x, y), \tag{2}$$

где E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона, δ – сближение тел, $g(x, y)$ – начальный зазор, определяемый геометрией поверхностей.

Если контактируют тела из разных материалов, их упругие свойства объединяются в приведённый модуль упругости E^*:

$$\frac{1}{E^*} = \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \tag{3}$$

для одинаковых материалов (сталь по стали)

$$E^* = \frac{E}{2(1 - \nu^2)}, \tag{4}$$

и уравнение (2) переписывается с коэффициентом $\frac{1}{\pi E^*}$. Для гладкого шара радиуса R функция зазора имеет вид $g(x, y) = \frac{(x^2 + y^2)}{2R}$. Для шероховатой поверхности к параболическому зазору добавляется случайная составляющая в виде суммы гармоник со случайными фазами и убывающими амплитудами, упрощённый аналог функции Вейерштрасса, используемой для построения фрактальных моделей рельефа поверхности [7]. В настоящей работе амплитуда неровностей принята равной 0,3% от радиуса зоны контакта, что соответствует реалистичному порядку шероховатости инженерных поверхностей.

Задача нахождения $p(x, y)$ должна удовлетворять трём физическим условиям: давление неотрицательно (тела не могут притягиваться друг к другу), суммарная сила реакции равна приложенной нагрузке, и выполняется само уравнение деформации поверхности:

$$p(x, y) \geq 0; \iint p\, dA = F;\ u_z(x,\ y) = \delta - g(x, y). \tag{5}$$

После дискретизации области контакта на сетку $n \times n$ элементов интеграл (2) заменяется матричным произведением $u = Cp$, а условия (3) превращают задачу в задачу квадратичного программирования, а именно минимизацию функционала упругой энергии системы:

$$\Pi(p) = \frac{1}{2} p^T C p - \delta 1^T p + g^T p, \qquad p(x, y) \geq 0, \qquad \sum_i p_i \Delta A = F.$$

Матрица влияния C, получаемая при дискретизации интегрального оператора Буссинеска, симметрична и положительно определена. Симметрия ($C_{ij} = C_{ji}$) следует из принципа взаимности деформаций теории упругости (теорема Бетти) [8]: смещение точки i от единичной силы, приложенной в точке j, равно смещению точки j от единичной силы, приложенной в точке i. Положительная определённость ($p^T C p > 0$ для любого ненулевого p) отражает физический факт: упругая энергия системы всегда положительна при любом ненулевом распределении давления. Это обеспечивает строгую выпуклость функционала $\Pi(p)$ и, как следствие, единственность его минимума.

Существование и единственность решения гарантируются обобщённой теоремой Вейерштрасса [9]: непрерывная строго выпуклая функция на непустом замкнутом ограниченном множестве до-

стигает на нём своего минимума, причём этот минимум единственен. В рассматриваемой задаче функционал $\Pi(p)$ строго выпуклый (в силу положительной определённости C), а допустимое множество $C\{p: p \geq 0, \sum p_i \Delta A = F\}$ замкнуто и ограничено. Следовательно, все условия теоремы выполнены, и решение задачи контактного давления существует и единственно.

Разработанная модель, как и классическая теория Герца, имеет ряд стандартных ограничений. Во-первых, используется приближение полупространства, предполагающее малые углы наклона поверхности в зоне контакта: это приближение оправдано для тел с радиусом кривизны, значительно превышающим размер зоны контакта. Во-вторых, модель линейно-упругая и не учитывает пластическую деформацию материала при высоких давлениях, что, как показано выше, ограничивает достоверность пиковых значений при шероховатом контакте. В-третьих, задача рассматривается как квазистатическая, без учёта динамики относительного движения тел, что исключает эффекты, связанные со скольжением и трением при движении.

МЕТОД РЕШЕНИЯ ПОСТАВЛЕННОЙ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ

Для задач с квадратичной выпуклой целевой функцией и ограничениями типа неравенств удобен метод проекции градиента [10]: он прост в реализации, гарантированно сходится, а операция проекции автоматически обеспечивает условие $p \geq 0$ без введения дополнительных переменных, в отличие, например, от метода множителей Лагранжа.

Итерационная процедура имеет вид:

$$p^{k+1} = max(p^k - \alpha_k(Cp^k - \delta 1 + g),\ 0), \tag{7}$$

где α_k – шаг итерации, определяемый методом золотого сечения [9]. На отрезке $[a, b]$ выбираются две точки $x_1 = a + 0{,}381966(b-a)$ и $x_2 = a + 0{,}618034(b-a)$. На каждой следующей итерации вычисляется только одно новое значение функции, далее второе оставляют с предыдущего шага, что вдвое сокращает число вычислений по сравнению с простым перебором. Отрезок неопределённости сужается в отношении $(\sqrt{5}-1)/2 \approx 0{,}618$ на каждом шаге, что обеспечивает более быструю сходимость, чем равномерный перебор. При этом стоит отметить, что симплекс-метод, стандартный для задач линейного программирования, здесь неприменим, поскольку используется квадратичная целевая функция (7), а не линейная.

Теоретически метод проекции градиента для выпуклой задачи с липшицевым градиентом сходится при шаге $\alpha < \frac{2}{\lambda_{max}}$, где λ_{max} – наибольшее собственное значение матрицы C [10]. В разработанном алгоритме диапазон поиска шага золотым сечением ограничен сверху величиной $\alpha_{max} = \frac{1{,}8}{\lambda_{max}}$, лежащей в допустимом диапазоне. После каждой итерации вектор давлений нормируется так, чтобы точно выполнялось условие равновесия сил. При этом нормировка не меняет направление вектора p, а меняет лишь его длину. Именно поэтому такая нормировка не нарушает сходимость. В качестве начального приближения используется аналитическое решение Герца для гладкого контакта:

$$p^{(0)}(x,y) = p_0\sqrt{1 - \frac{r^2}{a_0^2}}, \tag{8}$$

так называемый «тёплый старт», позволяющий сократить число итераций по сравнению со стартом из нулевого приближения. Остановка алгоритма происходит при выполнении критерия $||p^{k+1} - p^k||/||p^k|| < 10^{-9}$, что означает практическое прекращение изменения вектора давлений.

Алгоритм реализован на языке программирования *Python* с использованием библиотеки *NumPy* для векторизованных матричных операций. Построение матрицы влияния *C* для сетки 25×25 занимает на обычной ЭВМ около 2 секунд. Каждая итерация требует умножения матрицы на вектор – операции сложности $O(n^2)$, где n – число узлов сетки. Полный расчёт для гладкого контакта, то есть 277 итераций, занимает порядка 5 секунд, для шероховатого, около 353 итерации – немного больше. Суммарное время расчёта – порядка 7 секунд.

Ядро оператора Буссинеска зависит только от разности координат, то есть матрица C имеет структуру дискретной свёртки. При этом дискретизация квадратными ячейками с аналитической формулой самовлияния, использованная в настоящей работе, соответствует подходу метода граничных элементов [11]. Свёрточная структура C, в принципе позволяет вычислять произведение Cp через быстрое преобразование Фурье без явного хранения матрицы, что снижает сложность итерации с $O(n^2)$ до $O(n\log(n))$ и допускает переход к сеткам порядка 200×200.

ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Расчёт выполнен для пары стальных тел: модуль Юнга $E = 200$ ГПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0{,}3$ (приведённый модуль $E^* \approx 110$ ГПа), шар радиуса $R = 10$ мм на плоскости, нормальная нагрузка $F = 500$ Н, сетка 25×25 элементов.

Аналитическое решение Герца [1, 6] для этих параметров даёт радиус зоны контакта a_0=0,3244 мм и максимальное давление p_0 =2269 МПа. Результаты представлены на рисунках 1 и 2.

Основные результаты расчёта для гладкого и шероховатого контакта сведены в таблицу 1.

Численный результат для гладкого контакта совпадает с аналитическим решением Герца с погрешностью 0,8%. Граница зоны контакта, определённая численно, точно воспроизводит окружность Герца, как показано на рис. 1, а профиль давления вдоль центральной оси $p(x, 0)$ практически неотличим от полуэллиптического распределения Герца на всём протяжении зоны контакта. Это подтверждает корректность разработанного алгоритма и позволяет доверять его результатам и для шероховатого случая, для которого точного аналитического решения не существует.

Для шероховатого контакта, как показано на рис. 2, при той же нагрузке F=500 Н вместо симметричного полуэллиптического профиля наблюдаются ярко выраженные локальные пики давления в точках выступов шероховатости. Максимальное давление возросло с 2287 до 4885 МПа, более чем в 2,1 раза, поскольку та же суммарная нагрузка сосредотачивается на значительно меньшей площади фактического контакта.

Алгоритм для шероховатого случая сходится медленнее с одинаковым оптимальным шагом α в обоих случаях, поскольку он определяется только матрицей C, которая от шероховатости не зависит. При этом разница в числе итераций объясняется более сложной конфигурацией зоны контакта и тем, что начальное приближение дальше от истинного решения. Эти данные представлены на рис. 3.

На рис. 4 хорошо видно, что численная кривая для гладкого контакта (пунктирная) практически сливается с аналитическим решением Герца (пунктирная), тогда как кривая для шероховатого

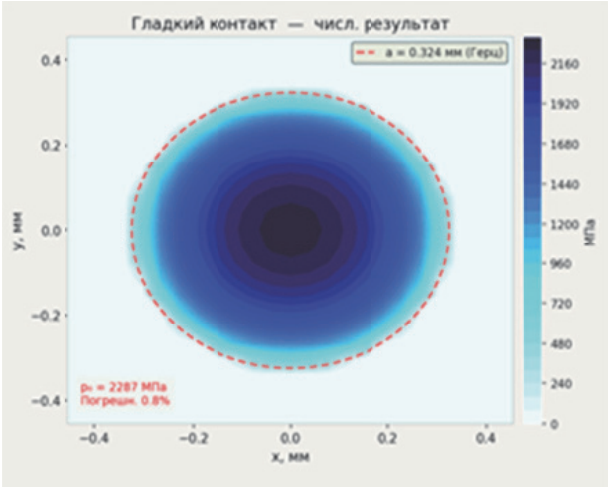

Рис. 1. Распределение контактного давления при гладком контакте: пунктирная окружность – граница зоны контакта по Герцу (a_0 = 0,324 мм)

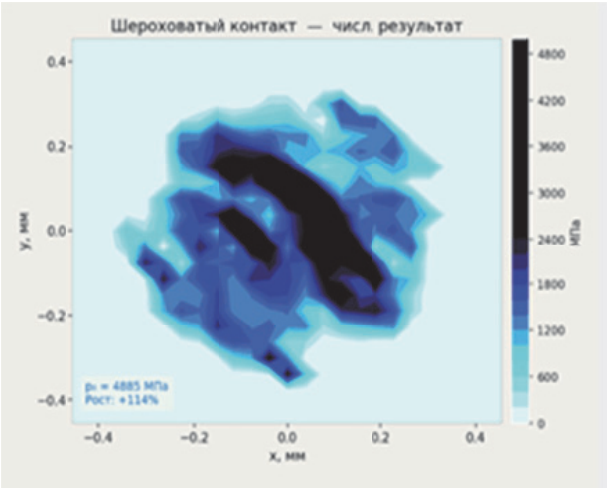

Рис. 2. Распределение контактного давления при шероховатом контакте: p_0 = 4885 МПа, прирост +114% к гладкому контакту

Таблица 1. Сравнение результатов для гладкого и шероховатого контакта

Параметр	Гладкий контакт	Шероховатый контакт
Число итераций до сходимости	277	353
Максимальное давление, МПа	2287	4885
Отклонение от решения Герца (p_0=2269 МПа)	0,8%	-
Прирост максимума относительно гладкого контакта	-	+113,7%

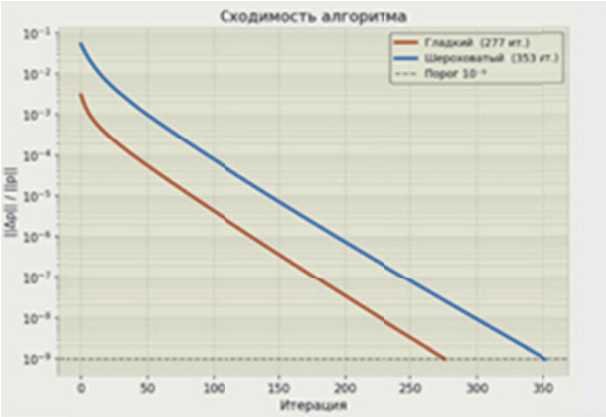

Рис. 3. Сходимость метода проекции градиента: относительное изменение вектора давлений по итерациям

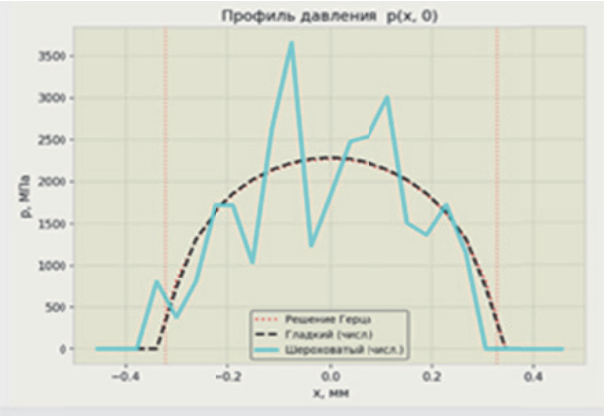

Рис. 4. Профиль давления вдоль центральной оси: сравнение решения Герца, численного результата для гладкого и шероховатого контакта

контакта хаотично осциллирует вокруг неё, с пиками, более чем в полтора раза превышающими огибающую Герца, и отдельными провалами почти до нуля внутри номинальной зоны контакта, где рельеф локально «отступает» от ответной поверхности.

Отдельного внимания заслуживает физический смысл полученных пиковых значений. Предел текучести стали составляет порядка 200–500 МПа, тогда как расчётное давление в точках выступов шероховатого контакта достигает 4885 МПа, многократно превышающий этот порог. В действительности материал в таких точках пластически деформировался бы, ограничивая рост давления (модель пластической деформации микрошероховатостей [1] и решение задачи о вдавливании сферического индентора в жёсткопластическое полупространство [12]). Принятая модель упругая, и этого не учитывает, поэтому давление, полученное численным методом, продолжает формально расти. Это не свидетельствует об ошибке алгоритма, а отражает известное ограничение упругой модели: она даёт качественно верную картину концентрации нагрузок, но при столь высоких значениях требует уточнения путём перехода к упругопластической постановке [13].

Погрешность 0,8% для гладкого случая связана с дискретизацией. Более мелкая сетка, например 50×50 снизила бы погрешность примерно до 0,2%, однако память для хранения матрицы C растёт как n^4, а время умножения как n^2, поэтому сетка 25×25 выбрана как практический компромисс между точностью и приемлемым временем расчёта.

Дальнейшее развитие подхода может включать расчёт износа по закону Арчарда [1, 14], замыкающий цепочку «давление – износ», а также переход от параметрической модели шероховатости в виде суммы гармоник к более реалистичным фрактальным поверхностям, построенным генеративными методами машинного обучения [7, 15].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Попов, В. Л.* Механика контактного взаимодействия и физика трения / В. Л. Попов. – М.: Физматлит, 2013. – 352 с.
2. *Демкин, Н. Б.* Качество поверхности и контакт деталей машин / Н. Б. Демкин, Э. В. Рыжов. – М.: Машиностроение, 1981. – 244 с.
3. *Крагельский, И. В.* Основы расчётов на трение и износ / И. В. Крагельский, М. Н. Добычин, В. С. Комбалов. – М.: Машиностроение, 1977. – 526 с.
4. Contact of Rough Surfaces – Deterministic Approaches // ScienceDirect. – 2026. – URL: https://www.sciencedirect.com/science/chapter/referencework/abs/pii/B9780443301384000054 (дата обращения: 07.05.2026). – Текст: электронный.
5. *ZHAO, et al.* Cross-Scale Mechanical Contact Analysis from Asperities to Rough Surfaces: A Critical Review // Coatings. – 2025. – Vol. 15, № 3. – Art. 333. – Текст: электронный.
6. *Джонсон, К.* Механика контактного взаимодействия: пер. с англ. / К. Джонсон. – М.: Мир, 1989. – 510 с.
7. *Сосенушкин, Е. Н.* Применение методов искусственного интеллекта для компьютерного моделирования фрактальных поверхностей / Е. Н. Сосенушкин, Е. А. Яновская, А. С. Желнов // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. – 2024. – № 1. – С. 109–115.
8. *Тимошенко, С. П.* Теория упругости: пер. с англ. / С. П. Тимошенко, Дж. Гудьер. – М.: Наука, 1975. – 576 с.
9. *Сосенушкин, Е. Н.* Методы и теория оптимизации: учебное пособие / Е. Н. Сосенушкин, Е. А. Яновская, А. С. Желнов и др.. – М.: Янус-К, 2023. – 200 с.
10. *Поляк, Б. Т.* Введение в оптимизацию / Б. Т. Поляк. – М.: Наука, 1983. – 384 с.
11. *Kolli, V.* Micro-scale deterministic asperity contact FEM simulation / V. Kolli, A. Winkler, S. Wartzack, M. Marian // Surface Topography: Metrology and Properties. – 2022. – Vol. 10, № 4. – Art. 044011. – DOI 10.1088/2051-672X/acac42. – Текст: электронный.
12. *Ишлинский, А. Ю.* Математическая теория пластичности / А. Ю. Ишлинский, Д. Д. Ивлев. – М.: Физматлит, 2001. – 704 с.
13. Rough contact mechanics models: recent advances and future perspectives / M. R. Marulli, M. Paggi, D. Dini. – 2025. – DOI 10.1007/978-3-662-53605-6_394-1. – Текст: электронный.

14. *Боуден, Ф. П.* Трение и смазка твёрдых тел: пер. с англ. / Ф. П. Боуден, Д. Тейбор [под ред. И. В. Крагельского]. – М.: Машиностроение, 1966. – 543 с.
15. *Marulli, M. R.* Rough contact mechanics models: recent advances and future perspectives / M. R. Marulli, M. Paggi, D. Dini // Scuola IMT Alti Studi Lucca. – 2025. – URL: https://iris.imtlucca.it/handle/20.500.11771/37039 (дата обращения: 24.09.2026). – Текст: электронный.

APPLICATION OF OPTIMIZATION ALGORITHMS TO PROBLEMS OF CONTACT MECHANICS OF SOLIDS

© 2026 E. N. Sosenushkin, E. A. Yanovskaya, A. S. Zhelnov, M. I. Lisov

Moscow State Technological University “STANKIN”, Moscow, Russia

The paper considers the problem of determining the contact pressure distribution $p(x, y)$ in the interaction zone of two elastic bodies with rough surfaces. The relevance of the problem is confirmed by engineering estimates according to which up to 70% of machine failures are caused by wear of mating surfaces, with local wear initiated precisely at points of maximum pressure concentration. Unlike statistical models of rough contact (the Greenwood — Williamson model), which replace the real relief with an ensemble of spherical asperities with a statistical height distribution, this work uses a direct deterministic approach based on the Boussinesq integral equation. After discretization on a regular grid the problem is reduced to a quadratic programming problem with respect to the vector of nodal pressures. Existence and uniqueness of the solution follow from the generalized Weierstrass theorem, owing to the symmetry and positive definiteness of the influence matrix. The problem is solved numerically by the projected-gradient method with a golden-section step-size search and exact renormalization of the pressure field at every iteration. The algorithm is implemented in Python and verified against the analytical Hertz solution with a maximum-pressure error below 0.8%. It is shown that local pressure peaks for rough contact exceed the smooth-contact value by more than a factor of two (113.7%) at the same total load, which quantitatively explains the mechanism of wear concentration at asperity tips. Limitations of the elastic model and directions of its further development are discussed.
Keywords: contact mechanics; tribology; projected gradient method; quadratic programming; Boussinesq equation; surface roughness; golden-section search; Weierstrass theorem; wear.

DOI: 10.37313/1990-5378-2026-28-5-26-31
EDN: NVBRDI

REFERENCES

1. *Popov, V. L.* Mekhanika kontaktnogo vzaimodejstviya i fizika treniya / V. L. Popov. – M.: Fizmatlit, 2013. – 352 s.
2. *Demkin, N. B.* Kachestvo poverhnosti i kontakt detalej mashin / N. B. Demkin, E. V. Ryzhov. – M.: Mashinostroenie, 1981. – 244 s.
3. *Kragel’skij, I. V.* Osnovy raschyotov na trenie i iznos / I. V. Kragel’skij, M. N. Dobychin, V. S. Kombalov. – M.: Mashinostroenie, 1977. – 526 s.
4. Contact of Rough Surfaces – Deterministic Approaches // ScienceDirect. – 2026. – URL: https://www.sciencedirect.com/science/chapter/referencework/abs/pii/B9780443301384000054 (data obrashcheniya: 07.05.2026). – Tekst: elektronnyj.
5. *ZHAO, et al.* Cross-Scale Mechanical Contact Analysis from Asperities to Rough Surfaces: A Critical Review // Coatings. – 2025. – Vol. 15, № 3. – Art. 333. – Tekst: elektronnyj.
6. *Dzhonson, K.* Mekhanika kontaktnogo vzaimodejstviya: per. s angl. / K. Dzhonson. – M.: Mir, 1989. – 510 s.
7. *Sosenushkin, E. N.* Primenenie metodov iskusstvennogo intellekta dlya komp’yuternogo modelirovaniya fraktal’nyh poverhnostej / E. N. Sosenushkin, E. A. Yanovskaya, A. S. Zhelnov // Izvestiya Samarskogo nauchnogo centra Rossijskoj akademii nauk. – 2024. – № 1. – S. 109–115.
8. *Timoshenko, S. P.* Teoriya uprugosti: per. s angl. / S. P. Timoshenko, Dzh. Gud’er. – M.: Nauka, 1975. – 576 s.
9. *Sosenushkin, E. N.* Metody i teoriya optimizacii: uchebnoe posobie / E. N. Sosenushkin, E. A. Yanovskaya, A. S. Zhelnov i dr.. – M.: Yanus-K, 2023. – 200 s.
10. *Polyak, B. T.* Vvedenie v optimizaciyu / B. T. Polyak. – M.: Nauka, 1983. – 384 s.
11. *Kolli, V.* Micro-scale deterministic asperity contact FEM simulation / V. Kolli, A. Winkler, S. Wartzack, M. Marian // Surface Topography: Metrology and Properties. – 2022. – Vol. 10, № 4. – Art. 044011. – DOI 10.1088/2051-672X/acac42. – Tekst: elektronnyj.
12. *Ishlinskij, A. Yu.* Matematicheskaya teoriya plastichnosti / A. Yu. Ishlinskij, D. D. Ivlev. – M.: Fizmatlit, 2001. – 704 s.
13. Rough contact mechanics models: recent advances and future perspectives / M. R. Marulli, M. Paggi, D. Dini. – 2025. – DOI 10.1007/978-3-662-53605-6_394-1. – Tekst: elektronnyj.
14. *Bouden, F. P.* Trenie i smazka tvyordyh tel: per. s angl. / F. P. Bouden, D. Tejbor [pod red. I. V. Kragel’skogo]. – M.: Mashinostroenie, 1966. – 543 s.
15. *Marulli, M. R.* Rough contact mechanics models: recent advances and future perspectives / M. R. Marulli, M. Paggi, D. Dini // Scuola IMT Alti Studi Lucca. – 2025. – URL: https://iris.imtlucca.it/handle/20.500.11771/37039 (data obrashcheniya: 24.09.2026). – Tekst: elektronnyj.

Evgeny Sosenushkin, Doctor of Engineering Sciences, Professor, Head of the Department of Composite Materials. E-mail: sen@stankin.ru
Elena Yanovskaya, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Applied Mathematics. E-mail: elena_yanovskaya@bc.ru
Andrey Zhelnov, Senior Lecturer of the Department of Applied Mathematics. E-mail: a.zhelnov@stankin.ru
Matfey Lisov, Student of the Department of Applied Mathematics. E-mail: matfei.lisov@yandex.ru