

ПОТЕРИ НАУКИ

Самарская Лука: проблемы региональной и глобальной экологии.
2011. – Т. 20, № 3. – С. 174-191.

УДК 514.1 + 574.47/58

ФРАКТАЛЬНОСТЬ ЭЙФЕЛЕВОЙ БАШНИ...¹ (ПАМЯТИ БЕНУА МАНДЕЛЬБРОТА [Benoît B. Mandelbrot; 20.11.1924–14.10.2010])

© 2011 ¹Г.С. Розенберг, ²Д.Б. Гелашвили, ^{2,3}Д.И. Иудин*

¹ Институт экологии Волжского бассейна РАН, г. Тольятти (Россия)

² Национальный исследовательский

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского,

³ Институт прикладной физики РАН, г. Нижний Новгород (Россия)

Поступила 29 ноября 2010

Статья посвящена памяти выдающегося математика XX века Б. Мандельброта – создателя фрактальной геометрии. Рассмотрены основные вехи его жизненного пути и научной деятельности. Обсуждается роль фрактального формализма в биоэкологии, в частности, в описании видовой структуры биотического сообщества.

Ключевые слова: Б. Мандельброт, биография, фрактальная геометрия, видовая структура биотического сообщества как квазифрактал.

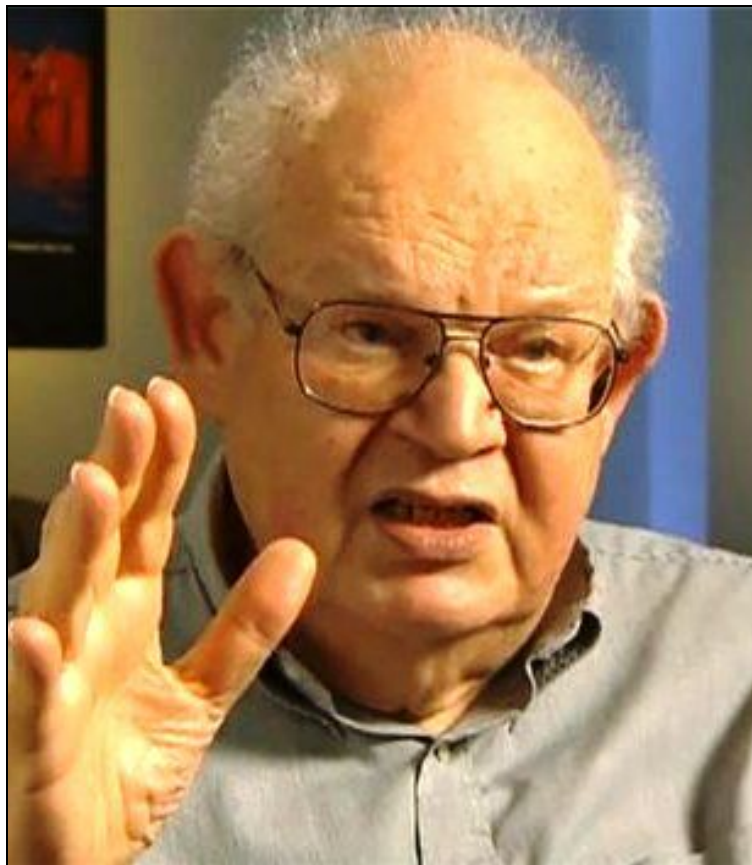
Rozenberg G.S., Gelashviliy D.B., Iudin D.I. *Fractality of theeiffel ower(memory of Benoît Mandelbrot [20.11.1924–14.10.2010])*

Article is devoted memory of the outstanding mathematician of the XX-th century of B. Mandelbrot – the founder of fractal geometry. The basic marks of its course of life and scientific activity are considered. The role of fractal a formalism in bioecology, in particular, in the description of specific structure of biotic communities is discussed.

Key words: B. Mandelbrot, the biography, fractal, self-similarity, exponential law, specific structure of communities as a quasifractal.

¹ См. [Мандельброт, 2002, с. 192]: «Я утверждаю, что (задолго до Коха, Пеано и Серпинского) в построенной Гюставом Эйфелем (*Gustave Eiffel. – Авторы.*) в Париже башне была осознанно воплощена идея фрактальной кривой, содержащей множество точек ветвления». Биографические подробности почерпнуты из двух интервью Б. Мандельброта [In his own., 1985; A maverick's apprenticeship., 2004] и статьи В.А. Шлыка [2005].

* *Розенберг Геннадий Самуилович*, доктор биологических наук, профессор, чл.-корр. РАН, директор, e-mail: genarozenberg@yandex.ru; *Гелашвили Давид Бежанович*, доктор биологических наук, профессор, заведующий кафедрой экологии, e-mail: ecology@bio.unn.ru.; *Иудин Дмитрий Игоревич*, доктор физико-математических наук, доктор биологических наук, профессор



<http://e-science.ru/forum/lofiversion/index.php/t23412.html>

В четверг, 14 октября 2010 г., в городе Кембридж (штат Массачусетс, США) после продолжительной и тяжелой болезни скончался выдающийся математик, создатель нового направления в геометрии – фрактальной геометрии, – профессор Бенуа Мандельброт. Разработанная им теория фракталов оказала существенное влияние на разные области человеческой деятельности и знания – компьютерную графику, финансы, экологию и др. Некрологи о нем поместили такие влиятельные газеты и журналы, как "New York Times" и "The Atlantic" (США), "Telegraph" и "Guardian" (Великобритания), "Le Monde" (Франция) и др.

«Если Вы знаете начало и конец, то у меня была самая обычная карьера», – говорил Мандельброт в Йельском университете на церемонии присуждения ему почетного звания Sterling² Professor of Mathematical Sciences. – «Но это не была прямая линия между началом и концом. Это была очень изогнутая, фрактальная кривая» [<http://mathnotations.blogspot.com/search/label/mandelbrot>].

² Самое высшее ученое звание в Йельском университете, присуждается с 1920 г. Джон Уильям Стерлинг (John William Sterling; 1844-1918) был адвокатом и филантропом; он завещал свое состояние Йельскому университету (\$18 млн., которые в 2003 г. «превратились» в \$180 млн.). На эти средства построена библиотека, химическая лаборатория, факультеты правоведения, богословия, школа медицины и пр.

Бенуа Мандельброт (фр. Benoît B. Mandelbrot³) родился 20 ноября 1924 г. в Варшаве в семье литовских евреев. Его отец был галантерейщиком, а мать – врачом. В 1936 г. вся семья, спасаясь от нацистов, эмигрировала на юг Франции (город Тюль [Tulle]), а потом перебралась и поселилась в Париже. Здесь Бенуа попал под влияние своих дядей⁴, которые и заинтересовали его математикой. При этом выяснилось, что у Бенуа великолепное пространственное воображение – даже алгебраические задачи он решал геометрическим способом. Он поступает в Политехническую школу в Париже, а сразу после войны становится студентом Сорбонны, где обучается под руководством Гастона Жулиа [Gaston M. Julia] и Пауля Леви [Paul Lévy]. После окончания Сорбонны, Мандельброт переезжает в США, где заканчивает Калифорнийский технологический институт. По возвращении во Францию в 1952 г. он защищает ученую степень PhD по математике в парижском университете, в 1955 г. женится на Альяетт Каган [Aliette Kagan] и переезжает в Женеву, «наездами» в Принстоне повышает свою квалификацию у Дж. фон Неймана [John von Neumann]⁵, а в 1958 г. окончательно поселяется в США, где приступает к работе в научно-исследовательском центре IBM (T.J. Watson Research Center) в Йорктауне [Yorktown Heights].

В IBM Мандельброт проработал 35 лет и 12 дней (до 1987 г.). Первоначально он занимался вопросами «чистой» математики. Потом решает задачу исследования ошибок, возникающих при передаче компьютерной информации по телефонным каналам связи компании. Анализируя природу этих, казалось бы, совершенно случайных ошибок, Мандельброт находит периоды их появления и определяет самоподобную структуру этих периодов: ошибки не появляются хаотично, а «собираются» в серии-кластеры; каждый кластер состоит из своих кластеров. Это открытие позволило не только сохранить компании огромные денежные средства на преодоление помех, но и стало первым толчком для нового, геометрического осмысления мира. Работая в IBM, Мандельброт все дальше и дальше уходит в сторону от чисто прикладных проблем компании. Он работает в области лингвистики, теории игр, экономики, авиации, географии, физиологии, астрономии, физики... и не раз покидает еще неоконченные исследования ради нового, «не освоенного» им раздела науки. Так, например, еще в 1951 г. Мандельброта «слегка заинтересовала закономерность, описывающая частотность употребления слов в речи, называемая за-

³ Он сам добавил среднюю заглавную букву, хотя она не обозначает второе имя.

⁴ Один из них был парижским математиком, членом группы, известной под общим псевдонимом «Николя Бурбаки [Bourbaki Nicolas]», которая выступала с концепцией построения математики с точки зрения принципов логики и аксиоматики теории множеств.

⁵ Интересный факт: грант Рокфеллерского фонда [A maverick's apprenticeship., 2004] по рекомендации фон Неймана был устроен У. Уивером [Warren Weaver], который с 1932 г. более 20 лет возглавлял отдел естественных наук этого Фонда и как менеджер науки способствовал поддержке наиболее талантливой молодежи. Достаточно часто, информационный индекс разнообразия называют *индексом Шеннона–Уивера*, хотя в совместной работе с К. Шенноном [Claude E. Shannon] над книгой "Математическая теория связи", Уивер «отвечал» за философско-методологическое обоснование построений Шеннона (см.: [Розенберг, 2010]). Еще одна «точка пересечения», в которой «встретились» видовая структура сообществ и фракталы...

коном Ципфа, причем узнал я о ней из книжного обозрения... Упомянутое обозре- ния я выудил из корзины для ненужных бумаг одного «чистого» математика⁶, имея в виду разжиться легким чтением на время поездки в парижском метро. Закон Ципфа оказалось несложно объяснить, а в качестве побочного эффекта моя работа поспособствовала рождению новой дисциплины – математической лингвистики» [Мандельброт, 2002, с. 584-585]. В экономике Мандельброт обнаружил, что внешне произвольные (случайные на вид) колебания цены на хлопок за большой времен- ной интервал (более ста лет) следуют скрытому математическому порядку во вре- мени, который не описывается стандартными кривыми; он проследил симметрию в длительных и кратковременных колебаниях цены. Это открытие оказалось неожиданностью для экономистов. Как говорится, «процесс пошел» и «я начал обра- щать внимание на аналогичные эмпирические закономерности в различных облас- тях человеческой деятельности...» [Мандельброт, 2002, с. 585].

В середине 60-х годов Мандельброт задал себе вопрос: какой длины побере- жье Великобритании [Mandelbrot, 1967]? Оказалось, что все зависит от инструмен- та, с помощью которого эта длина будет измеряться. Опыт показывает, что длина береговой линии L зависит от масштаба l , которым проводятся измерения, и увели- чивается с уменьшением последнего по степенному закону

$$L = \Lambda l^\alpha, \quad \Lambda = \text{const}.$$



Рис. 1. Береговая линия побережья Великобритании
(http://en.wikipedia.org/wiki/Lewis_Richardson)

Так, например, для побережья Великобритании $\alpha \approx 0,3$. Происхождение такой за- висимости понятно: чем меньше масштаб мы используем, тем меньшие детали по-

⁶ В одном из интервью [In his own..., 1985] Мандельброт признался, что этим «чистым» математиком был его дядя.

бережья будут учтены и дадут вклад в измеряемую длину (рис. 1). Наоборот, увеличивая масштаб, мы «спрямляем» побережье, уменьшаем тем самым его длину L . Таким образом, «понятие "длины" обычно бессмысленно для географических кривых» [Mandelbrot, 1967, p. 636].

В 1975 г.⁷, в изданной во Франции книге "Les objets fractals: forme, hasard et dimension", Мандельброт вводит в научный оборот понятие «фрактал»⁸. «Термин фрактал я образовал от латинского причастия *fractus*. Соответствующий глагол *frangere* переводится как ломать, разламывать, т. е. создавать фрагменты неправильной формы. Таким образом, разумно – и как кстати! – будет предположить, что, помимо значения "фрагментированный" (как, например, в словах фракция или рефракция), слово *fractus* должно иметь и значение "неправильный по форме"» [Мандельброт, 2002, с. 18]. Иными словами, «вырезав» небольшую часть из структуры, имеющей свойства фрактальности, можно рассмотреть её в некотором увеличении и обнаружить, что она подобна всей структуре в целом; выделив еще более мелкую часть из уже вырезанной части и увеличив её, опять обнаружим, что и она подобна первоначальной структуре. Для идеальной фрактальной структуры, такую операцию можно проделывать до бесконечности, и даже самые микроскопические частички будут подобны структуре в целом. Самоподобие предполагает, что копирование и масштабирование некоторого «эталонного» образа позволяет природе легко создавать сложную многомасштабную структуру. Реальные объекты имеют довольно четко ограниченный интервал масштабов, в которых они проявляют свою фрактальную природу.

«Фракталы вокруг нас повсюду, и в очертаниях гор, и в извилистой линии морского берега. Некоторые из фракталов непрерывно меняются, подобно движущимся облакам или мерцающему пламени, в то время как другие, подобно деревьям или нашим сосудистым системам, сохраняют структуру, приобретенную в процессе эволюции» [Пайген, Рихтер, 1993, с. 7]. А вот еще одна цитата из работы В.Н. Беклемишева [1964, с. 37]: «...живой организм (*и экосистема*. – Г.Р.) не обладает постоянством материала – форма его подобна форме пламени, образованного потоком быстро несущихся раскаленных частиц; частицы сменяются, форма остается». Иными словами, подобно мольеровскому Журдену, экологи давно «говорят прозой» (о фракталах), не догадываясь об этом... И вновь Мандельброт [2002, с. 13]: «Облака не являются сферами, горы – конусами, береговые линии нельзя изобразить с помощью окружностей, кору деревьев не назовешь гладкой, а путь молнии – прямолинейным. В более общем виде я заявляю, что многие формы Природы настолько неправильны и фрагментированы, что в сравнении с евклидовыми фигурами... Природа демонстрирует не просто более высокую степень, но совершенно иной уровень сложности». Пример фрактального множества, ставшего классическим, приведен на рис. 2.

В арсенале современной математики Мандельброт нашел удобную количественную меру «неидеальности объектов» – извилистости контура, морщинистости поверхности и пористости объема (её предложили два математика – Ф. Хаусдорф

⁷ Правда, англоязычные исследователи ведут свой «отсчет» от перевода этой работы на английский язык [Mandelbrot, 1977].

⁸ «Дайте чудовищу какое-нибудь уютное, домашнее имя, и вы удивитесь, насколько легче будет его приручить!» [Мандельброт, 2002, с. 18].

[Felix Hausdorff] и А.С. Безикович), – которая носит сегодня имена своих создателей (*размерность Хаусдорфа–Безиковича* [она же – *хаусдорфова размерность*]). Как и любая количественная характеристика, эта размерность прошла проверку на работоспособность. В предельных случаях (применительно к идеальным объектам классической евклидовой геометрии) она давала те же численные значения, что и известная задолго до нее, так называемая, *топологическая размерность* (иначе говоря, была равна нулю для точки, единице – для гладкой плавной линии, двум – для «ровной» фигуры и поверхности, трем – для тела и пространства). Однако новая размерность обладала более тонкой чувствительностью ко всякого рода несовершенствам реальных объектов, позволяя различать то, что прежде было безлико и неразлично – степень «извилистости». Но самое непривычное⁹ в размерности Хаусдорфа–Безиковича состоит в том, что она может принимать не только целые, но и дробные значения (именно чтобы подчеркнуть эту способность такого рода размерностей, Мандельброт и предложил называть их *фрактальными размерностями*).

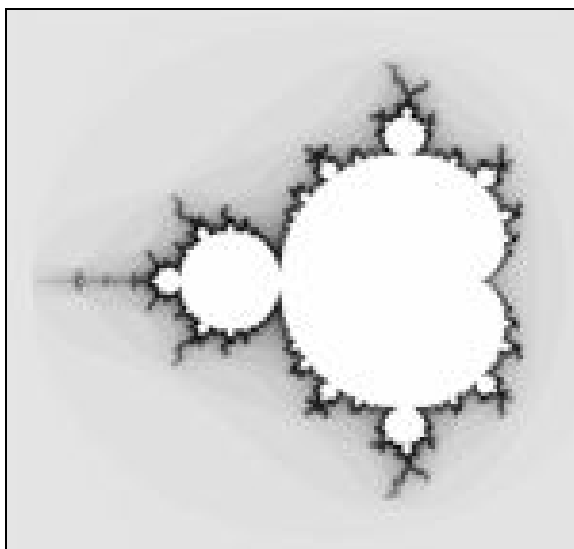


Рис. 2. Фрактальное множество Мандельброта¹⁰, иногда называемое его автографом.

⁹ Хотя, чего тут непривычного? Любые усреднения «уходят» от изначальной целочисленности исходных значений. Например, «По данным ЦРУ США, в среднем женщины в России рожают 1,39 ребенка» (Газета "Ведомости", 22 ноября 2007 г.) или детская классика Самуила Маршака – стихотворение "Про одного ученика и шесть единиц":

– Задачу задали у нас,
Её решал я целый час,

И вышло у меня в ответе:
Два землекопа и две трети.

¹⁰ Впервые множество Мандельброта было описано в 1905 г. французским специалистом в области аналитической динамики комплексных чисел П. Фату [Pierre Joseph Louis Fatou]. Однако именно Мандельброт не только сказал, *почему это важно*, но и смог *убедить в этой важности* остальных.

Если «перевести» вышеизложенные рассуждения на «экологический язык», мы имеем дело с примером противостояния дискретности и континуума при описании сложных систем (в том числе и экологических; см., например, [Миркин, Наумова, 1998; Шитиков и др., 2005, кн. 1, с. 77]): топологическая размерность – дискретна (увеличивает свое значение скачком), фрактальная – непрерывна. И в этом контексте, у фрактальной размерности Мандельброта открываются дополнительные методологические перспективы.

Интересно отметить, что само определение понятия «фрактал» («фракталом называется структура, состоящая из частей, которые в каком-то смысле подобны целому») предоставляет пищу для системологических рассуждений. Действительно, в своей монографии, Мандельброт [2002, с. 31] дает математически более корректное определение: «фракталом называется множество, размерность Хаусдорфа–Безиковича которого строго больше его топологической размерности». Это определение достаточно строго в математическом плане; однако именно это и является его недостатком, поскольку оно требует определения еще и понятий размерности (топологической и хаусдорфовой), к тому же оно исключает многие классы фрактальных объектов, встречающиеся в различных областях. Однако все виды математических фракталов являются абстракциями, непосредственное применение которых для описания реальных объектов возможно только с некоторыми оговорками. Математическое фрактальное множество, как это следует из его определения, должно обладать некоторыми «неестественными» свойствами (например, у него должны отсутствовать наибольший и наименьший масштабы самоподобия). С другой стороны, в любой физической структуре должен существовать конечный наименьший масштаб. Кроме того, такая структура всегда ограничена в занимаемом ею пространстве, что приводит к нарушению самоподобия вблизи границы (достаточно малая область, содержащая границу множества, не подобна области того же размера, находящейся вдали от границы). «Сила понятия фрактальной размерности по Хаусдорфу в том, что она позволяет различать категории "гладкий" и "хаотичный". Слабость же её в том, что не удастся различить категории "нерегулярный, но самоподобный" и "геометрически хаотичный". Это происходит из-за того, что определение является весьма общим, что и требуется для математики. Но для конкретной области науки общий характер этого определения оказывается чрезмерным: оно становится не только неудобным, но и совершенно неподходящим» [Мандельброт, 1993, с. 139]. Иными словами, на примере определения понятия «фрактал» хорошо иллюстрируется один из важных системологических принципов – *принцип несовместимости Заде* [Lotfi Ali Asker Zadeh]: чем глубже анализируется реальная сложная система, тем менее определены наши суждения о её поведении [Розенберг и др., 1999]. Поэтому, для решения задачи о фрактальности, например, видовой или родовой структуры сообщества, вполне подходящим является первое (может быть, более вербальное) определение «фрактала». Можно сказать, что фрактальный объект статистически единообразен в широком диапазоне масштабов. В идеальном случае (математический фрактал) такое самоподобие приводит к тому, что фрактальный объект оказывается инвариантным относительно масштабных изменений пространства (растяжений и сжатий; см., например, [Гелашвили и др., 2007а, 2008а]).

Другим важным свойством фракталов является их *иерархичность*, т. е. способность повторяться в разных масштабах пространства и времени. Существует четкий *критерий принадлежности объекта к фракталам* – объект нельзя считать фрактальным, если он не обладает свойством самоподобия, но можно – если он не иерархичен.

Кроме самоподобия и иерархичности, диагностическими признаками фрактального объекта являются [Федер, 1991; Шредер, 2001; Морозов, 2004]:

- *Степенная зависимость* числа структурных элементов от масштаба, поскольку математическим выражением самоподобия являются степенные законы вида:

$$f(x) = cx^{\alpha}.$$

- *Масштабная инвариантность (скейлинг; от англ. *scaling* – масштабирование)* – возможность воспроизводить объект при изменении масштабов.
- Строгое отличие *фрактальной размерности* (α), которая может быть как целочисленной, так и дробной (например, размерность $\alpha = 2,87$), от топологической (всегда целочисленной). «Фракталы были чужды уютному евклидовому миру с его регулярными структурами» [Макаренко, 2002, с. 122]¹¹.

Для реального природного фрактала существует некоторый минимальный масштаб длины l_{\min} , такой, что на расстояниях $l \approx l_{\min}$ его основное свойство – самоподобие – пропадает. Кроме того, на достаточно больших масштабах длин $l > l_{\max}$, где l_{\max} – характерный геометрический размер объектов, это свойство самоподобия также нарушается. Поэтому свойства природных фракталов рассматриваются лишь на масштабах l , удовлетворяющих соотношению $l_{\min} < l < l_{\max}$.

Продолжим краткое жизнеописание Бенуа Мандельброта. Параллельно с работой в IBM, «я стал популярным в разных крупных университетах как *visiting professor*, но ни один из них не хотел видеть меня на постоянной должности в силу непредсказуемости моих [научных] интересов¹². Однажды, когда я все еще был относительно молодым, я получил от одного из ведущих американских университетов очень очаровательное предложение, от которого отказались на другой день, как только декан заинтересовался моей профессиональной деятельностью в других [смежных с математикой] областях» [A maverick's apprenticeship..., 2004]. В это же время (в 1974 г.) Мандельброту присваивается звание Почетного сотрудника IBM

¹¹ Приведем еще одну цитату из работы Н.Г. Макаренко [2002, с. 122]: «Позднее оказалось, что фракталами являются и давно известные в анализе нерегулярные функции, вызывавшие отвращение аналитиков прошлого века». Подтверждением тому служат слова из письма 20 мая 1893 г. французского математика Ш. Эрмита [Charles Hermite] – нидерландскому математику Т. Стилтьесу [Thomas Johannes Stieltjes], которые также приводит Макаренко: «С омерзением и ужасом я отворачиваюсь от этой зловредной язвы – непрерывных функций нигде не имеющих производных...». Мандельброт [2002, с. 61] так цитирует эти же слова: «Это наказание Господне, эти жалкие функции без производных...».

¹² Мандельброт приводит такую аналогию [In his own..., 1985]: «Соревнование важно в жизни, следовательно, и в науке; но почему наука должна подражать спорту, где гонку на милю и 1500 метров (только на 7,3% короче!) часто выигрывают разные чемпионы? И хуже того, в то время как десятиборье является Олимпийской дисциплиной, "научное десятиборье", которое я, казалось, практиковал, не приветствовалось в академии».

(IBM Fellow)¹³, которое является самым высоким знаком отличия для технических специалистов компании и признанием их выдающихся технических достижений и лидерства в таких областях, как проектирование, программирование, услуги, научная деятельность и технологии. Почетным сотрудникам предоставляются более широкие возможности, чтобы поддерживать их деятельность по разработке инноваций (Мандельброт возглавляет небольшую группу).

Только после ухода из IBM, с 1987 г. Мандельброт начал систематически преподавать на математическом факультете Йельского университета, а штатным профессором стал лишь в 1999 г. – как он сам отметил [A maverick's apprenticeship., 2004], «Йельский университет, возможно, следует считать мировым рекордсменом, в моем случае, т. к. в штат я был зачислен в столь преклонном возрасте (75 лет. – *Авторы.*)». С этой должности Мандельброт ушел в 2005 г., став, как уже отмечалось выше, Sterling Professor. Среди огромного числа его наград и почетных званий следует, наверное, назвать чрезвычайно престижные премии Александра Гумбольдта (Alexander von Humboldt Prize, 1988), Вольфа по физике (Wolf Prize, 1993), Японии (Japan Prize¹⁴, 2003) и др. Он был академиком Национальной академии наук США (с 1987), Американской академии искусств и наук, Академии IBM технологии, почетным членом Норвежской академии наук и литературы, почетным доктором (Honoris causa) более 15 крупнейших университетов мира, в мае 2010 г. он был удостоен Почетной ученой степени Университета Джона Хопкинса (Балтимор [Baltimore, Maryland]); Мандельброт был награжден орденами и медалями многих стран (орденом Почетного легиона [Франция], медалью Президента Республики Италия, медалью Ричардсона [Lewis Fry Richardson Medal] Европейского геофизического общества и пр.).

НЕСКОЛЬКО СЛОВ О ФРАКТАЛЬНОСТИ ВИДОВОЙ СТРУКТУРЫ СООБЩЕСТВ

Сегодня модели фрактальной геометрии все шире находят свое приложение в экологических исследованиях (см. обзоры: [Ю. Пузаченко, А. Пузаченко, 1996; Ю. Пузаченко, 1997, Seuront, 2010]); у нас в стране этот процесс следует связать, в первую очередь, с работами нижегородской школы [Иудин, Гелашвили, 2002; Iudin, Gelashvily, 2003; Иудин и др., 2003; Гелашвили и др., 2004а, 2006а, б, 2007а, б, 2008а, 2009б, 2010б и др.; Iudin et al., 2010].

Рассмотрим видовую структуру сообщества. Зависимость видового богатства (S) от «выборочного усилия», выраженного через площадь обследованной территории (A) или объем выборки (N), давно интересовала исследователей. Здесь уместно привести слова Ю. Одума [1975, с. 196-197]: «подобрал уравнения для таких кривых (*зависимости между числом видов и их обилием в различных местообитаниях.*

¹³ За всю историю компании IBM ("Голубого Гиганта") этого звания были удостоены чуть более 200 специалистов.

¹⁴ Эта в высшей степени престижная международная премия учреждена Фондом науки и технологий Японии. Она вручается в присутствии Императора ежегодно в двух областях за «оригинальные и выдающиеся достижения, способствующие прогрессу науки и технологий и продвижению человечества к миру и процветанию».

– Г.Р.), можно помочь выяснить, какими математическими "законами" определяется зависимость между S и N ». Еще в 1859 г. Х. Уотсон [Hewett Cottrell Watson] предложил степенную зависимость S от A для сосудистых растений Британии в билогарифмических координатах (цит. по: [Pounds, Puschendorf, 2004]); другим исследователем, описавшим зависимость S от A , стал в начале 20-х годов прошлого столетия О. Аррениус [Olof Wilhelm Arrhenius]. Практически в это же время, резко критикуя уравнение Аррениуса (прямой подстановкой данных была продемонстрирована не реалистичность оценок, получаемых степенной зависимостью, предложенной Аррениусом, для целого ряда видов растений), сходное уравнение в 1922 г. предложил и Г. Глизон [Henry Allan Gleason] при описании зависимости в полулогарифмических координатах видового богатства от площади ареала для тополиных ассоциаций северного Мичигана. Наконец, степенные законы, описывающие зависимость видового богатства (S) от «выборочного усилия», выраженного через площадь обследованной территории (A), нашли свое логическое завершение в рамках *равновесной теории островной биогеографии* [MacArthur, Wilson, 1967].

Итак, основной вывод из этого краткого исторического экскурса состоит в том, что видовая структура сообщества самоподобна, что и отражает степенная зависимость числа видов от площади обследованной территории.

Фрактальность видовой структуры сообщества выражается в степенной зависимости между видовым богатством (S) и численностью сообщества (N , эквивалент масштаба):

$$S = N^k, \quad k = \ln S / \ln N,$$

где $0 \leq k \leq 1$ – предлагается Р. Маргалефом [Ramón Margalef] рассматривать как индекс разнообразия [Маргалеф, 1992, с. 143]: «зависимость между S и N можно выразить следующим образом:

$S = N^0$	$S = N^k$	$S = N^1$
хемостат	обычная экосистема	музейная экспозиция.

Степень k – прекрасный *индекс разнообразия*. Он находится в пределах между 0 и 1. Он может выражать связь с энергией (энергия, проходящая через систему, наибольшая в хемостате и нулевая в музее). Он не характеризует детали, но может выражать фрактальную самоорганизацию внутри системы».

Однако, как и любая фрактальная размерность, индекс $k = (\ln S) / (\ln N)$ не дает исчерпывающего количественного представления о видовой структуре биотического сообщества: формула Маргалефа констатирует лишь сам факт наличия вида в выборке, но не содержит, например, сведений о распределении видов по численности или о степени их доминирования. Наиболее общее описание внутреннего устройства самоподобных объектов позволяет дать *теория мультифракталов* (основные понятия и положения этой теории также были введены Б. Мандельбротом в начале 70-х годов прошлого века), характеризующих бесконечной иерархией размерностей; она достаточно подробно изложена Е. Федером [1991] и Д.И. Иудиным [2006]. *Мультифракталы* – неоднородные фрактальные объекты, для полного описания которых, в отличие от регулярных фракталов, недостаточно введения всего лишь одной величины (фрактальной размерности D), а необходим целый спектр таких размерностей, число которых, вообще говоря, бесконечно (это объясняется

тем, что наряду с чисто геометрическими характеристиками, определяемыми величиной D , такие фракталы обладают и некоторыми статистическими свойствами).

Так, *обобщенной размерностью Реньи* [Alfréd Rényi] (D_q) распределения является убывающая функция q , вводимая определением [Федер, 1991]:

$$D_q = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{1-q} \frac{\ln M_q}{\ln N} \right\} = \frac{\tau(q)}{1-q}$$

Обобщенные размерности Реньи не являются, строго говоря, фрактальными размерностями в общепринятом понимании этого слова. Поэтому наряду с ними используется, так называемая, *функция мультифрактального спектра* $f(\alpha)$ или «спектр сингулярностей». Для её получения необходимо произвести *преобразование Лежандра* функции $\tau(q)$:

$$\begin{cases} \alpha(q) = -\frac{d}{dq} \tau \\ f(\alpha) = q\alpha + \tau \end{cases}$$

При применении мультифрактального формализма к структуре сообщества, это сообщество рассматривается как множество, состоящее из отдельных фрактальных подмножеств, которые можно интерпретировать как совокупности особей, относящихся к видам со сходной представленностью. Для таких подмножеств можно вычислить фрактальную размерность, которая и будет характеризовать видовое разнообразие. Именно такой смысл имеет ордината точек α на графике мультифрактального спектра; абсцисса же точек $f(\alpha)$ характеризует относительную представленность (долю) видов того или иного подмножества (см. рис. 3). Наличие на графике спектра точек, лежащих по оси α («индекс сингулярности») близко к нулю (1), означает присутствие в сообществе сильных доминантов (причем, чем меньше абсцисса точек, тем сильнее доминирование – сообщество В); наличие же точек, лежащих близко к единице, означает присутствие в сообществе редких видов (2; сообщество А). Площадь под кривой спектра $\int f(\alpha)$ можно интерпретировать как показатель, обратно пропорциональный выравниванию видов в сообществе: чем она больше (сообщество А), тем меньше выравнивание, и наоборот. Крайним вариантом выравнивания является равнопредставленность видов; при этом весь спектр «схлопывается» в одну точку.

На практике величины D_q можно оценить, используя несколько различающихся значений N , по более простой формуле:

$$D_q = \frac{1}{1-q} \frac{\ln M_q}{\ln N}$$

Примечательный факт: многие обобщенные размерности Реньи являются нормированными вариантами традиционных индексов видового разнообразия. Так, для $q = 0$ – это *индекс Маргалефа*, $q = 0,5$ – связан с *индексом Л.А. Животовского*, $q = 1$ – с *информационным индексом видового разнообразия Шеннона*, $q = 2$ – с *индексом доминирования Симпсона* [Edward Hugh Simpson]–*Джини* [Corrado Gini]. Этот ряд можно продолжить и получить весь спектр обобщенных размерностей D_q для любых q в интервале от $-\infty$ до $+\infty$ (см., например: [Якимов, 2007]).

Мультифрактальный спектр видовой структуры сообщества (рис. 3) позволяет по-новому взглянуть на проблемы «индексологии» (см., например, [Шитиков

и др., 2005, кн. 1, с. 86-90]). Действительно, используя для характеристики видовой структуры сообщества какой-либо индекс (пусть даже *очень корректный*), исследователь, фактически, описывает это сообщество одной точкой; фрактальный подход позволяет увидеть «портрет» сообщества в двухмерном пространстве $\{\alpha, f(\alpha)\}$. Естественно, что это открывает новые перспективы интерпретации экологической информации.

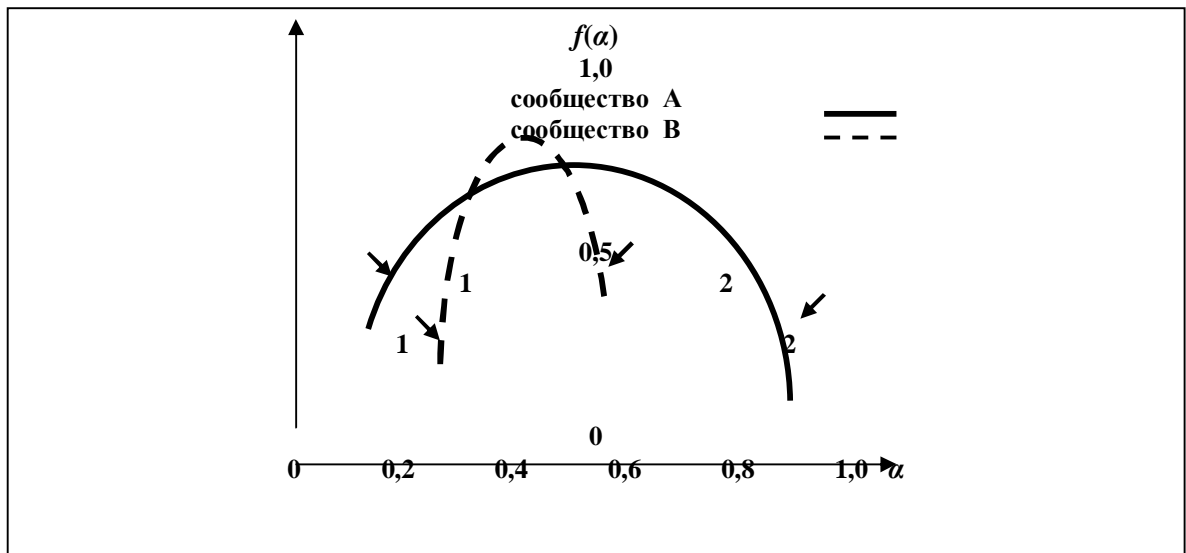


Рис. 3. Мультифрактальные спектры видовой структуры сообществ.
По оси абсцисс отложен индекс сингулярности α , по оси ординат – значения функции мультифрактального спектра $f(\alpha)$.

Фундаментальные теоретические законы экологии свидетельствуют о том, что биотические сообщества обладают удивительной, хотя и специфической структурной универсальностью [Seuront, 2010]. В частности, они демонстрируют самоподобие при изменении численности сообщества, но, в то же время, структурные особенности внутренних энергетических каналов и иерархия связей биотических сообществ остаются скрытыми от глаз: они не имеют непосредственных геометрических образов, инвариантных относительно преобразований масштаба. Поэтому принимаемые ниже аналогии между фрактальным анализом геометрических объектов и анализом структуры биологических сообществ носят, в определенном смысле, характер не формализованных пока допущений. С другой стороны, эта связь хорошо «просматривается» на множестве объектов, для которых удалось получить фрактальные характеристики видовой структуры:

- гидробиоценозов (сообщества водорослей [Corbit, Garbary, 1995], субантарктических морских макроводорослей у острова South Georgia в южной Атлантике [Davenport et al., 1996; Davenport, 2004], сообщества зоопланктона Чебоксарского водохранилища [Гелашвили и др., 2004, 2006б; Шурганова и др., 2005], зообентоса городских озер Нижнего Новгорода [Гелашвили и др., 2007б] и литорали [Азовский, Чертопруд, 1997; Azovsky et al., 2000], сообщества мидий [Comito, Rusignuolo, 2000; Kostylev, Erlandson, 2001]);

- наземных экосистем (теоретические аспекты [Scheuring, 1991; Scheuring, Riedi, 1994], корневая система злаков [Tatsumi et al., 1989], растительные сообщества на дюнах (Yakimov et al. 2008), растительность в калифорнийском заповеднике на серпентинной почве [Green et al., 2003], лесные сообщества горы Донглиншан [Donglingshan; западный Тянь-Шань; Zhang et al., 2006], сообщества орибатидных клещей [Иудин, 2006], сообщества мелких млекопитающих Нижегородского Поволжья [Гелашвили и др., 2008б; Солнцев, 2009]);
- ископаемых сообществ (видовая структура ископаемых сообществ мелких млекопитающих Северного Прикаспия в плейстоцене – голоцене [Гелашвили и др., 2008в; Солнцев, 2009]);
- сообществ симбионтов (сообщества гельминтов мелких млекопитающих Самарской Луки [Гелашвили и др., 2009а; Snegireva, 2010]); сообщества паразитических насекомых на примере наездников-ихневмоид Висимского заповедника [Снегирева и др., 2010; Гелашвили и др., 2010а]);
- таксономического разнообразия (теоретические аспекты [Burlando, 1990, 1993], виды семейства Proteaceae [протейные] во флористической области мыса Доброй Надежды [Южная Африка; эта область характеризуется самым высоким процентом эндемиков; Bossuyt, Hermy, 2004], классов *Aves* и *Mammalia* [Ю. Пузаченко, А. Пузаченко, 1996], сосудистых растений национального парка «Самарская Лука» [Гелашвили и др., 2010б]), представителей отр. *Rodentia* на территории Европы в неогене [Солнцев, 2009]).

Являясь обобщенным геометрическим образом видовой структуры, мультифрактальные спектры (см. выше рис. 3) позволяют сделать детальный анализ таксономической «выравненности» (эквивалентности) отдельных изолированных сообществ, выделить степень доминирования отдельных групп, уточнить удельный вес редких видов и т. д. Их использование при оценке биоразнообразия является непротиворечивым, если анализируются закономерности распределения численностей по видам при увеличении количества проб из некоторого однородного биотопа; в этом случае суммарная численность N соответствует приписываемой ей дефиниции «размер фрактальной ячейки». Однако при сравнении двух или нескольких разнородных экологических объектов с использованием мультифрактального анализа остаются открытыми вопросы об уровне гетерогенности сообществ и необходимой эквивалентности выборочных усилий.

«При применении фрактального подхода в теоретической экологии важно помнить и о его ограничениях. Наиболее принципиальное обстоятельство связано с локализацией самоподобия в определенном интервале масштабов. Это имеет отношение как к пространственной, так и видовой структуре сообщества» [Гелашвили и др., 2008а, с. 32]. Поэтому насущна необходимость разработки динамических фрактальных моделей нового поколения, позволяющих обобщить последовательность статических состояний экосистемы (например, в виде пространственных или временных её срезов) и показать структурно-топологическую динамику мультифрактальных спектров.

Завершить это короткое и немного грустное эссе хочется тремя цитатами. Первая принадлежит самому Бенуа Мандельброту [A maverick's apprenticeship..., 2004]: «Судьба того, чтобы быть названным лучшим физиком среди математиков

или лучшим математиком среди физиков, была тем, чего я всегда боялся и с чем боролся. И я не ценю похвалу своих работ в экономике всеми, кроме самих экономистов. Конечно, хорошо быть свободным от экономистов "перед фактом" цензуры и обсуждения; но я также хочу победить и "после факта", путем понимания и одобрения, по крайней мере, части их сообщества».

Президент Франции Николя Саркози [Nicolas Sarkozy], воздавая должное Бенуа Мандельброту, сказал, что у него был «сильный, самобытный склад ума, который никогда не уклонялся от нововведения и разрушения предвзятых понятий... Его исследования, полностью развитые вне господствующих представлений, привели к развитию современной информационной теории» [“Le Figaro”, 16 октября 2010 г.].

Наконец, последняя цитата заимствована из книги М. Шредера [2001, с. 18-19]: «Вспоминая славные имена прошлого, мы не должны забывать о нашем великом современнике, несравненном Бенуа Мандельброте... Как выяснилось, все эти годы мы жили с фрактальными артериями неподалеку от фрактальных речных систем, собирающих влагу со склонов фрактальных гор под фрактальными облаками и катящих свои воды к фрактальным берегам морей и океанов. Но как и мольерову мешанину во дворянстве, нам не доставало надлежащей прозы – существительного *фрактал* и прилагательного *фрактальный*, который мы обрели благодаря Бенуа Мандельброту».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Азовский А.И., Чертопруд М.В. Анализ пространственной организации сообществ и фрактальная структура литорального бентоса // Докл. Академии наук (ДАН). 1997. Т. 356, № 5. С. 713-715.

Беклемишев В.Н. Об общих принципах организации жизни // Бюл. МОИП. Отд. биол. 1964. Т. 69, вып. 2. С. 22–38.

Гелашвили Д.Б., Дмитриев А.И., Иудин Д.И. и др. Мультифрактальный анализ видовой структуры сообществ мелких млекопитающих Волго-Уральского палеоценоза // Докл. Академии наук (ДАН). 2008в. Т. 421, № 4. С. 562-566. – **Гелашвили Д.Б., Иудин Д.И., Розенберг Г.С.** Фрактальная структура перколяционного кластера и пространственное распределение доминантных видов // Докл. Академии наук (ДАН). 2008а. Т. 408, № 4. С. 560-563. – **Гелашвили Д.Б., Иудин Д.И., Розенберг Г.С. и др.** Степенной закон и принцип самоподобия в описании видовой структуры сообществ // Поволж. экол. журн. 2004. № 3. С. 227-245. – **Гелашвили Д.Б., Иудин Д.И., Розенберг Г.С. и др.** Основы мультифрактального анализа видовой структуры сообщества // Успехи соврем. биол. 2008а. Т. 128, № 1. С. 21-34. – **Гелашвили Д.Б., Иудин Д.И., Розенберг Г.С. и др.** Фрактальные аспекты популяционной экологии // Вестн. Удмурт. ун-та. 2009б, вып. 1. С. 15-22. – **Гелашвили Д.Б., Иудин Д.И., Розенберг Г.С. и др.** Фрактальная характеристика видовой структуры сообществ наездников-ихневмонид Среднего Урала // Докл. Академии наук (ДАН). 2010а. Т. 434, № 6. С. 838-841. – **Гелашвили Д.Б., Иудин Д.И., Розенберг Г.С., Якимов В.Н.** Элементы фрактальной теории видовой структуры гидробиоценозов // Изв. Самар. НЦ РАН. 2006б. Т. 8, № 1. С. 70-79. – **Гелашвили Д.Б., Иудин Д.И., Розенберг Г.С., Якимов В.Н.** Степенной характер накопления видового богатства как проявление фрактальной структуры биоценоза // Журн. общ. биол. 2007а. Т. 68, № 3. С. 170-179. – **Гелашвили Д.Б., Иудин Д.И., Солнцев Л.А. и др.** Мультифрактальный анализ видовой структуры сообществ гельминтов мелких млекопитающих Самарской Луки // Докл. Академии наук (ДАН). 2009а. Т. 427, № 5. С. 703-706. – **Гелашвили Д.Б., Пухнаревич Д.А., Иудин Д.И.** Структурная организация и фрактальная природа макрозообентоса малых городских водоемов // Поволж. экол. журн. 2007б. № 1. С. 3-15. – **Гелашвили Д.Б., Якимов В.Н., Иудин Д.И. и др.** Мультифрактальный анализ видовой структуры сообществ мелких млекопитающих Нижегород-

ского Поволжья // Экология. 2008б. № 6. С. 456-461. – **Гелашвили Д.Б., Якимов В.Н., Иудин Д.И. и др.** Фрактальные аспекты таксономического разнообразия // Журн. общ. биол. 2010б. Т. 71, № 2. С. 115-130.

Иудин Д.И. Методология принципа самоподобия в исследовании видовой структуры биотических сообществ: Дис. ... докт. биол. наук. Нижний Новгород, 2006. 273 с. – **Иудин Д.И., Гелашвили Д.Б.** Применение мультифрактального анализа структуры биотических сообществ в экологическом мониторинге // Проблемы регионального экологического мониторинга: Матер. науч. конф. Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2002. С. 49-52. – **Иудин Д.И., Гелашвили Д.Б., Розенберг Г.С.** Мультифрактальный анализ структуры биотических сообществ // Докл. Академии наук (ДАН). 2003. Т. 389, № 2. С. 279-282.

Макаренко Н.Г. Фракталы, аттракторы, нейронные сети и все такое // Научная сессия МИФИ-2002. IV Всероссийская научно-техническая конференция «Нейроинформатика – 2002». Лекции по нейроинформатике. Часть 2. М.: МИФИ, 2002. С. 121-169. – **Мандельброт Б.Б.** Фракталы и возрождение теории итераций // Пайген Х.-О., Рихтер П.Х. Красота фракталов. Образы комплексных динамических систем М.: Мир, 1993. С. 131-140. – **Мандельброт Б.Б.** Фрактальная геометрия природы = The Fractal Geometry of Nature. М.; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. 656 с. – **Маргалев Р.** Облик биосферы. М.: Наука, 1992. 214 с. – **Миркин Б.М., Наумова Л.Г.** Наука о растительности (история и современное состояние основных концепций). Уфа: Гилем, 1998. 413 с. – **Морозов А.Д.** Введение в теорию фракталов. М.; Ижевск: Ин-т компьютер. иссл., 2004. 160 с.

Одум Ю. Основы экологии. М.: Мир, 1975. 740 с.

Пайген Х.-О., Рихтер П.Х. Красота фракталов. Образы комплексных динамических систем М.: Мир, 1993. 176 с. (Peitgen H.-O., Richter P.H. The Beauty of Fractals. Images of Complex Dynamical Systems. Heidelberg; N.Y.: Springer-Verlag, 1986. 199 p.).

Пузаченко Ю.Г. Приложение теории фракталов к изучению структуры ландшафта // Изв. РАН, сер. геогр. 1997. № 2. С. 24-40. – **Пузаченко Ю.Г., Пузаченко А.Ю.** Семантические аспекты биоразнообразия // Журн. общ. биол. 1996. Т. 57, № 1. С. 1-43.

Розенберг Г.С. Информационный индекс и разнообразие: Больцман, Котельников, Шеннон, Уивер... // Самарская Лука: проблемы региональной и глобальной экологии: Бюл. 2010. Т. 19, № 2. С. 4-25. – **Розенберг Г.С., Мозговой Д.П., Гелашвили Д.Б.** Экология. Элементы теоретических конструкций современной экологии. Самара: СНЦ РАН, 1999. 396 с.

Снегирёва М.С., Федюнин В.А., Гелашвили Д.Б. Фрактальные аспекты характеристики сообщества паразитических насекомых на примере наездников-ихневмоид Висимского заповедника // Биологические системы: устойчивость, принципы и механизмы функционирования: Сб. материалов III Всероссийской науч.-практ. конф. с междунар. участием, 1–5 марта 2010 года: в 2-х ч. Нижний Тагил: НТГСПА, 2010. Ч. 2. С. 213-217. – **Солнцев Л.А.** Изучение видовой структуры и таксономического разнообразия рецентных и ископаемых сообществ мелких млекопитающих с позиций принципа самоподобия: Автореф. дис. ... канд. биол. наук. Нижний Новгород, 2009. 25 с.

Федер Е. Фракталы. М.: Мир, 1991. 254 с. (Feder J. Fractals. N.Y.: Plenum Pub. Corp., 1988. 283 p.).

Шитиков В.К., Розенберг Г.С., Зинченко Т.Д. Количественная гидроэкология: методы, критерии, решения: в 2-х кн. М.: Наука, 2005. Кн. 1. 281 с.; Кн. 2. 337 с. – **Шлык В.А.** Он оставил царапину на поверхности всего: к 80-летию Бенуа Мандельброта // Изв. Челябинского НЦ РАН. 2005. Вып. 3 (29). С. 107-124. – **Шредер М.** Фракталы, хаос, степенные законы. Миниатюры из бесконечного рая. М.; Ижевск: Ин-т компьютер. иссл., 2001. 528 с. – **Шурганова Г.В., Иудин Д.И., Гелашвили Д.Б., Якимов В.Н.** Мультифрактальный анализ видového разнообразия зоопланктоценозов Чебоксарского водохранилища // Актуальные проблемы рационального использования биологических ресурсов водохранилищ. Рыбинск: Изд-во "Рыбинский дом печати", 2005. С. 294-309.

Якимов В.Н. Фрактальность видовой и пространственной структуры биологических сообществ: разработка концепции и верификация: разработка концепции и верификация: Дис. ... канд. биол. наук. Нижний Новгород, 2007. 125 с. – **Якимов В.Н., Гелашвили Д.Б., Иудин Д.И.** Применение мультифрактального формализма для анализа видовой структуры // Вестник ННГУ. Сер. биол. 2005, вып. 2 (10). С. 94-99.

A maverick's apprenticeship. The Wolf Prize for Physics / Ed. by D. Thouless. Singapore: World Scientific, 2004. – **Azovsky A.I., Chertoproud M.V., Kucheruk N.V. et al.** Fractal properties of spatial distribution of intertidal benthic communities // *Mar. Biol.* 2000. V. 136. P. 581-590.

Bossuyt B., Hermy M. Species turnover at small scales in dune slack plant communities // *Basic Appl. Ecol.* 2004. V. 5. P. 321-329. – **Burlando B.** The fractal dimension of taxonomic systems // *J. Theor. Biol.* 1990. V. 146. P. 99-114. – **Burlando B.** The fractal geometry of evolution // *J. Theor. Biol.* 1993. V. 163. P. 161-172.

Commuto J.A., Rusignuolo R.R. Structural complexity in mussel beds: the fractal geometry of surface topography // *J. Exp. Mar. Biol. Ecol.* 2000. V. 255. P. 133-152. – **Corbit J.D., Garbary D.J.** Fractal dimension as a quantitative measure of complexity in plant development // *Proc. R. Soc. Lond.* 1995. V. B-262. P. 1-6.

Davenport J. Fractal dimension estimation in studies of epiphytal and epilithic communities: strengths and weaknesses // *Handbook of Scaling Methods in Aquatic Ecology* / Ed. by Seuront L., Strutton P.G. Boca Raton (FL): CRC Press. 2004. P. 245-256. – **Davenport J., Pugh P.J.A., McKechnie J.** Mixed fractals and anisotropy in subantarctic marine macroalgae from South Georgia: implications for epifaunal biomass and abundance // *Mar. Ecol. Prog. Ser.* 1996. V. 136. P. 245-55.

Green J.L., Harte J., Ostling A. Species richness, endemism and abundance patterns: tests of two fractal models in a serpentine grassland // *Ecol. Letters.* 2003. V. 6. P. 919-928.

In his own words: BBM Interview by Anthony Barcellos // *Mathematical People* / Ed. by D.J. Albers & G.L. Alexanderson. Boston: Birkhäuser, 1985. P. 205-225. – **Iudin D.I., Gelashvili D.B.** Multifractality in ecological monitoring // *Nucl. Instr. Meth. Phys. Res.* 2003. V. 502. P. 799-801. – **Iudin D.I., Gelashvili D.B., Rozenberg G.S. et al.** Bases of the multifractal analysis of species structure of community // *Types of Strategy and Not Only...* (Materials of the Fourth Russian-Polish School of Young Ecologists; Togliatti, September, 6-12th, 2010) / Ed. by G.S. Rozenberg. Togliatti: Cassandra, 2010. P. 17-19.

Kostylev V., Erlandson J. A fractal approach for detecting spatial hierarchy and structure on mussel beds // *Mar. Biol.* 2001. V. 139. P. 497-506.

MacArthur R.H., Wilson E.O. The Theory of Island Biogeography. Princeton (NJ): Princ. Univ. Press, 1967. 203 p. [2nd ed. Princ. Univ. Press, 2001. 203 p.]. – **Mandelbrot B.B.** How long is the coast of Britain? Statistical self-similarity and fractional dimension // *Science.* 1967. V. 156, № 3775. P. 636-638. – **Mandelbrot B.B.** *Fractals: Form, Chance and Dimension.* San Francisco (CA): W.H. Freeman and Co., 1977. 265 p.

Pounds J.A., Puschendorf R. Clouded futures // *Nature.* 2004. V. 427. P. 107-109.

Scheuring I. The fractal nature of vegetation and the species-area relation // *Theor. Popul. Biol.* 1991. V. 39. P. 170-177. – **Scheuring I., Riedi R.H.** Application of multifractals to the analysis of vegetation patterns // *J. Veg. Sci.* 1994. V. 5. P. 489-496. – **Seuront L.** *Fractals and Multifractals in Ecology and Aquatic Science.* Boca Raton (FL): CRC Press, 2010. 344 p. – **Snegireva M.S.** Fractal species' structure characteristic of parasitic communities // *Types of Strategy and Not Only...* (Materials of the Fourth Russian-Polish School of Young Ecologists; Togliatti, September, 6-12th, 2010). Togliatti: Cassandra, 2010. P. 57-58.

Tatsumi J., Yamauchi A., Kono Y. Fractal analysis of plant root systems // *Ann. Bot.* 1989. V. 64. P. 499-503.

Yakimov V.N., Bossuyt B., Iudin D.I., Gelashviliy D.B. Multifractal diversity-area relationship at small scales in dune slack plant communities // *Oikos.* 2008. V. 117. P. 33-39.

Zhang Y., Ma K., Anand M., Fu B. Do generalized scaling laws exist for species abundance distribution in mountains? // *Oikos.* 2006. V. 115. P. 81-88.

Монографии Б. Мандельброта «по фракталам» и сборники, вышедшие под его редакцией

Mandelbrot B. Some Problems of Potential Theory (Aeronautical Engineering Thesis). Pasadena (CA): California Institute of Technology, 1949. 42 p.

Mandelbrot B. Contribution à la théorie mathématique des jeux de communication (Ph.D. Thesis). Paris: Publ. de l'Institut de Statistique de l'Université de Paris, 1953. V. 2. P. 1-124.

- Mandelbrot B.** Linguistique statistique macroscopique: Théorie mathématique de la loi d'Etoupa–Zipf (Basée sur les méthodes de la théorie de l'information et de la thermodynamique. Booklet). Paris: Inst. Henri Poincaré: Séminaire de calcul des probabilités, 1957. 80 p.
- Apostel L., Mandelbrot B., Morf A.** Logique, langage et théorie de l'information. – Paris: Pres. Univ. de France, 1957. 207 p.
- Mandelbrot B.** Les objets fractals: forme, hasard et dimension. – Paris: Flammarion, 1975. – 192 p. (4 издания во Франции – 1975 [192 p.], 1984 [204 p.], 1989 [268 p.], 1995 [209 p.]; книга переведена на англ. [1977], итал., исп. [1987], порт. [1991], баский [1992], болг. [1996], рум., кит. [1998], чеш. языки [2003]).
- Mandelbrot B.** Fractals: Form, Chance and Dimension. San Francisco (CA): W.H. Freeman and Co., 1977. 265 p.
- Mandelbrot B.** The Fractal Geometry of Nature. – New York: W.H. Freeman and Co., 1982. 461 p. (книга переведена на яп. [1984], нем. [1987], исп., [1997], кит. [1998], рус. языки [2002]).
- Мандельброт Б.** Фрактальная геометрия природы. М.; Ижевск: «Ин-т компьютерных исследований», 2002. 656 с.
- Mandelbrot B.** La geometria fractal de la naturaleza. Milano: Imago (Montedison Progetto Cultura), 1987; Roma: Edizioni Theoria, 1989. 91 p.
- Mandelbrot B.B.** Fractals and Scaling in Finance: Discontinuity, Concentration, Risk. New York: Springer, 1997. 551 p.
- Mandelbrot B.B.** Fractales, hasard et finance. Paris: Flammarion, 1997. 246 p. (книга переведена на русский язык [2004])
- Мандельброт Б.** Фракталы, случай и финансы. М.; Ижевск: «Ин-т компьютерных исследований», 2004. 256 с.
- Mandelbrot B.B.** Multifractals and 1/f Noise: Wild Self-Affinity in Physics. New York: Springer, 1999. 442 p.
- Mandelbrot B.** Nel mondo dei frattali. Roma: Di Renzo Editore, 2001. 60 p.
- Mandelbrot B.B.** Gaussian Self-Affinity and Fractals: Globality, the Earth, 1/f Noise and R/S. New York: Springer, 2002. 654 p.
- Mandelbrot B.B.** Fractals and Chaos: The Mandelbrot Set and Beyond. New York: Springer, 2004. 308 p. (книга переведена на рус. язык [2009]).
- Мандельброт Б.** Фракталы и хаос: Множество Мандельброта и другие чудеса. М.; Ижевск: «Ин-т компьютерных исследований», 2009. 391 с.
- Mandelbrot B.B., Hudson R.L.** The (Mis)behavior of Markets: A Fractal View of Risk, Ruin, and Reward. – New York: Basic Books; London: Profile, 2004. 329 p. (книга переведена на исп. [Бразилия, 2004], франц., нем., итал. [2005], порт., исп. [Испания], греч., турец., рус. [2006], кит. [2007], яп. [2008] языки).
- Мандельброт Б.Б., Хадсон Р.Л.** (Не)послушные рынки: фрактальная революция в финансах = The Misbehavior of Markets. М.; СПб. (Россия); Киев (Украина): Williams, 2006. 389 с.
- Shlesinger M.F., Mandelbrot B.B., Rubin R.J.** (Eds.). Proceedings of the Gaithersburg Symposium on Fractals in the Physical Sciences // Special issue of "The Journal of Statistical Physics" (New York: Plenum). 1984. V. 36. 400 p.
- Mandelbrot B.B., Passoja D.E.** (Eds.). Fractal Aspects of Materials: Metal and Catalyst Surfaces, Powders and Aggregates: Extended Abstracts of a MRS Symposium, Boston. – Pittsburgh (PA): Materials Research Society, 1984. 47 p.
- Laibowitz R.B., Mandelbrot B.B., Passoja D.E.** (Eds.). Fractal Aspects of Materials: Extended Abstracts of a MRS Symposium, Boston. Pittsburgh (PA): Materials Research Society, 1985. 127 p.

- Mandelbrot B.** (Ed.). Fractals: Basic Concepts, Computation and Rendering. Notes for a course given in San Francisco CA on July 23, 1985 at SIGGRAPH 85. (Association for Computing Machinery; Special Interest Group on Computer Graphics). Reprint with additions and deletions. Professional Development Seminar given in Boston, MA on March 3, 1986. (Boston Chapters of SIGGRAPH and ACM.). 318 p.
- Schaefer D.W., Laibowitz R.B., Mandelbrot B.B., Liu S.H.** (Eds.). Fractal Aspects of Materials I: Extended Abstracts of a Symposium, Boston. Pittsburgh (PA): Materials Research Society, 1986. 148 p.
- Mandelbrot B.** (Ed.). Ensembles fractals. Notes de l'école d'hiver CEA - EDF - INRIA. Roquencourt (FR): Jan., 1987. 340 p.
- Hurd A.J., Mandelbrot B.B., Weitz D.A.** (Eds.). Fractal Aspects of Materials: Disordered Systems. Extended Abstracts of a MRS Symposium, Boston. Pittsburgh (PA): Materials Research Society, 1987. 208 p.
- Weitz D.A., Sander L.M., Mandelbrot B.B.** (Eds.). Fractal Aspects of Materials: Disordered Systems: Extended Abstracts of a MRS Symposium, Boston. Pittsburgh (PA): Materials Research Society, 1988. 356 p.
- Scholz C.H., Mandelbrot B.B.** (Eds.). Fractals in Geophysics. Basel (Switzerland); Boston (MA): Birkhäuser // Special issue of "Pure and Applied Geophysics". 1989. V. 131, № 1/2. 275 p.
- Frame M.L., Mandelbrot B.B.** (Eds.). Fractals, Graphics and Mathematical Education. Washington (DC): Mathematical Association of America; Cambridge (UK): Univ. Press, 2002. 206 p.

Виртуальные (web-published) книги
(представлены на website <http://www.math.yale.edu/mandelbrot>)

- **Mandelbrot B.B.** Stories about B.B.M. and His Work.
- **Mandelbrot B.B.** Essais et portraits: essais sur les fractales et portraits d'hommes de science.
- **Mandelbrot B.B.** Expository Articles.
- **Mandelbrot B.B.** Fractal and Multifractal Finance: Crashes and Long-Dependence.
- **Mandelbrot B.B.** History and Opinions.
- **Mandelbrot B.B.** Key Topics on Fractals and Statistics.
- **Mandelbrot B.B.** Long Dependence.
- **Mandelbrot B.B.** Negative Fractal Dimension.
- **Mandelbrot B.B.** Notes aux "comptes-rendus".
- **Mandelbrot B.B.** Radio and TV.
- **Mandelbrot B.B.** Random Multifractals.
- **Mandelbrot B.B.** Recent Publications.
- **Mandelbrot B.B.** Statistical Physics.
- **Mandelbrot B.B.** Sundry Publications and Interviews.
- **Mandelbrot B.B.** "Top Fourteen" Key Papers.
- **Frame M.L., Mandelbrot B.B.** Panorama of Fractals and Their Uses (2001).